PRÁCTICA 10: Ecuaciones Diferenciales de primer orden

1. Si hay inicialmente 50 gramos de una sustancia radioactiva y al cabo de tres días quedan solamente 10 gramos, ¿qué porcentaje de la cantidad original queda al cabo de 4 días? Suponer que la rapidez de desintegración de una sustancia radioactiva es proporcional a la cantidad de la sustancia presente.

N(t) = gramos en el instante t
N(0) = 50
N(3) = 10

$$\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t) \Rightarrow \frac{dN}{N} = -kdt \Rightarrow \ln(N) = -kt + C \Rightarrow N(t) = Ce^{-kt}$$

$$\left.\begin{array}{l} N(0) = 50 \\ N(3) = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 50 = C \\ 10 = Ce^{-3k} \end{array}\right\} \Rightarrow 10 = 50e^{-3k} \Rightarrow e^{-3k} = \frac{1}{5} \Rightarrow -3k = -\ln 5 \Rightarrow k = 0.536479$$

$N(t) = 50e^{-0.536479t} \Rightarrow N(4) = 50e^{-2.14592} = 5.84804$ gramos $\Rightarrow 11.6961\%$ del inicio.

2. “El alcalde es........”. El rumor se extiende entre la población de una ciudad de un millón de habitantes a un ritmo proporcional al número de personas que aún no lo han oído. Al cabo de tres días lo sabían 150.000 personas. ¿Cuánto tardará en saberlo el 75% de la población?

x(t) = número de personas que lo han oído en el instante t
x(0) = 1
x(3) = 150.000

$$\frac{dx(t)}{dt} = k \cdot (1.000.000 - x(t)) \Rightarrow \frac{dx}{1.000.000 - x(t)} = kdt \Rightarrow \int \frac{dx}{1.000.000 - x(t)} = \int kdt$$

$$-\ln(1.000.000 - x(t)) = kt + C \Rightarrow 1.000.000 - x(t) = Ce^{-kt} \Rightarrow x(t) = 1.000.000 + Ce^{-kt}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 1 \\ x(3) = 150.000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = 1.000.000 + C \\ 150.000 = 1.000.000 + Ce^{-3k} \end{array}\right\} \Rightarrow C = -999.999$$

$$150.000 = 1.000.000 - 999.999e^{-3k} \Rightarrow 999.999e^{-3k} = 850.000 \Rightarrow k = 0{,}0541726$$

$$x(t) = 1.000.000 - 999.999e^{-0{,}0541726t}$$

$$x(t) = 750.000 \Rightarrow 750.000 = 1.000.000 - 999.999e^{-0{,}0541726t}$$

$999.999e^{-0{,}0541726t} = 250.000 \Rightarrow t = 25{,}5903$ días.

3. Un proyectil con masa de 2 Kg. es lanzado hacia arriba con una velocidad inicial de 200 m/seg. La magnitud de la fuerza ejercida sobre el proyectil por la resistencia del aire es de v/20. ¿En qué momento alcanzará el proyectil su máxima altura sobre el suelo? ¿Cuál es la altura máxima?

$$\left.\begin{array}{l} m\dfrac{dv}{dt} = -mg - \dfrac{1}{20}v \\ v(0) = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\frac{dv}{dt} = -19,62 - 0,05v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -9,81 - 0,025v$$

$$\frac{dv}{9,81+0,025v} = -dt \Rightarrow 40\ln|9,81+0,025v| = -t + C \Rightarrow \ln|9,81+0,025v| = -0,025t + C$$

$$9,81 + 0,025v = Ce^{-0,025t} \Rightarrow v(t) = -392,4 + C\cdot e^{-0,025t} \overset{v(0)=200}{\Rightarrow} 200 = -392,4 + C \Rightarrow C = 592,4$$

$$v(t) = -392,4 + 592,4\cdot e^{-0,025t}$$

$$v(t) = 0 \Rightarrow 0 = -392,4 + 592,4\cdot e^{-0,025t} \Rightarrow 592,4\cdot e^{-0,025t} = 392,4$$

$e^{-0,025t} = 0{,}66239 \Rightarrow -0,025t = \ln(0{,}66239) = -0.411901 \Rightarrow t = 16{,}476$ segundos.

$$x(t) = \int\left(-392,4 + 592,4\cdot e^{-0,025t}\right)dt = -392,4t - 23.696\cdot e^{-0,025t} + C$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = -23.696 + C \Rightarrow C = 23.696$$

$x(t) = -392,4t - 23.696\cdot e^{-0,025t} + 23.696 \Rightarrow x(16,476) \approx 1.534{,}81$ metros.

4. Según la ley de Newton del enfriamiento, la velocidad a que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del aire. Si la temperatura del aire es de 30º C y la sustancia se enfría de 100º C a 70º C en 15 minutos, ¿cuándo será 40º C la temperatura de la sustancia?

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dT}{dt} = k[30 - T] \\ T(0) = 100 \\ T(15) = 70 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dT}{30-T} = kdt \Rightarrow -\ln(30-T) = kt + C \Rightarrow 30 - T = Ce^{-kt}$$

$$T(t) = 30 + Ce^{-kt}$$

$$T(0) = 100 \Rightarrow 100 = 30 + C \Rightarrow C = 70$$

$$T(15) = 70 \Rightarrow 70 = 30 + 70e^{-15k} \Rightarrow e^{-15k} = \frac{4}{7} \Rightarrow -15k = \ln\frac{4}{7} \Rightarrow k = 0{,}0373077$$

$$T(t) = 30 + 70e^{-0,0373077t}$$

$T(t) = 40 \Rightarrow 40 = 30 + 70e^{-0,0373077t} \Rightarrow e^{-0,0373077t} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow t = 52{,}1584$ minutos.

5. Suponer que un estudiante portador de un virus de gripe, regresa a un campus universitario aislado que tiene 1.000 estudiantes. Si se supone que la rapidez con la que el virus se propaga es proporcional no sólo al número de estudiantes contagiados, sino también, al número de alumnos no contagiados, determinar el número de estudiantes contagiados después de 6 días, si además se observa que después de 4 días, el número de estudiantes contagiados es de 50. (Suponer que nadie sale del campus durante el transcurso de la enfermedad).

x(t) = número de estudiantes infectados en el instante t
x(0) = 1
x(4) = 50

$$\frac{dx(t)}{dt} = k \cdot x(t) \cdot \left(1.000 - x(t)\right) \Rightarrow \frac{dx}{x(1.000 - x)} = kdt$$

$$\frac{1}{x(1.000 - x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1.000 - x} \Rightarrow 1 = A(1.000 - x) + Bx \Rightarrow A = B = \frac{1}{1.000}$$

$$\frac{1}{1.000}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{1.000}\int \frac{dx}{1.000 - x} = kt + C \Rightarrow \frac{1}{1.000}\left(\ln(x) - \ln(1.000 - x)\right) = kt + C$$

$$\frac{x}{1.000 - x} = Ce^{1.000kt}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 1 \\ x(4) = 50 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{1.000 - 1} = C \\ \dfrac{50}{950} = Ce^{4.000k} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{50}{950} = \frac{e^{4.000k}}{999} \Rightarrow e^{4.000k} = \frac{50 * 999}{950} \Rightarrow k = \frac{1}{4.000}\ln\frac{50 * 999}{950}$$

$$\left.\begin{array}{l} C = \dfrac{1}{999} \\ k = \dfrac{1}{4.000}\ln\dfrac{50 * 999}{950} \approx 0.000990579 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{1.000 - x} = \frac{e^{0.990579t}}{999}$$

$$t = 6 \Rightarrow \frac{x(6)}{1.000 - x(6)} = \frac{e^{0.990579 * 6}}{999} \Rightarrow \frac{x(6)}{1.000 - x(6)} = 0.381868$$

$x(6) = 381.868 - 0.381868x(6) \Rightarrow 1.381868x(6) = 381.868 \Rightarrow x(6) \approx 276$ contagiados.

6. A un objeto con masa de 5 Kg. se le aplica una velocidad inicial hacia abajo de 50 m/seg., y luego se le deja caer bajo la influencia de la gravedad. Suponer que la fuerza en Newtons debida a la resistencia del aire es de -10v, donde v es la velocidad del objeto medida en m/seg. Determinar la ecuación de movimiento del objeto. Si el objeto se encuentra inicialmente a 500 m. arriba del suelo, determinar en qué momento golpeará contra la superficie.

$$\left.\begin{array}{l} m\dfrac{dv}{dt} = mg - 10v \\ v(0) = 50 \end{array}\right\} \Rightarrow 5\frac{dv}{dt} = 5 * 9,81 - 10v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 9,81 - 2v \Rightarrow \frac{dv}{9,81 - 2v} = dt$$

$$-\frac{1}{2}\ln|9,81 - 2v| = t + C \Rightarrow \ln|9,81 - 2v| = -2t + C \Rightarrow 9,81 - 2v = Ce^{-2t}$$

$$9,81 - 2v = Ce^{-2t} \Rightarrow v(t) = 4,905 + C \cdot e^{-2t} \overset{v(0)=50}{\Rightarrow} 50 = 4,905 + C \Rightarrow C = 45,095$$

$$v(t) = 4,905 + 45,095 \cdot e^{-2t}$$

$$x(t) = \int \left(4,905 + 45,095 \cdot e^{-2t}\right) dt = 4,905t - 22.5475 \cdot e^{-2t} + C$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = -22.5475 + C \Rightarrow C = 22.5475$$

$$x(t) = 4,905t - 22.5475 \cdot e^{-2t} + 22,5475$$

$$x(t) = 500 \Rightarrow 500 = 4,905t - 22,5475 \cdot e^{-2t} + 22,5475$$

$500 = 4,905t + 22,5475 \Rightarrow t = 21,9579$ segundos.

PRÁCTICA 10

Ejercicio 1

$$\text{resolver}(N'(t)=k\cdot N(t)) \rightarrow \left\{\left\{N(t)=\frac{c}{e^{-k\cdot t}}\right\}\right\}$$

$$\text{resolver}\left\{\begin{bmatrix}\frac{c}{e^{-k\cdot 0}}=50\\ \frac{c}{e^{-k\cdot 3}}=10\end{bmatrix}\right\} \rightarrow \{\{c=50.,k=-0.53648\}\}$$

$$N(t)=\frac{50}{e^{0.53648\cdot t}}$$

$$\frac{50}{e^{0.53648\cdot 4}} \rightarrow 5.848$$

$$\frac{5.848}{50}\cdot 100 \rightarrow 11.696$$

Ejercicio 2

$$\text{resolver}(x'(t)=k\cdot x(t)\cdot(1000-x(t)))$$

$$\rightarrow \left\{\left\{-\frac{\ln(-x(t)+1000)}{1000\cdot k}+\frac{\ln(x(t))}{1000\cdot k}=c+t\right\}\right\}$$

$$\text{resolver}\left\{\begin{bmatrix}-\frac{\ln(-1+1000)}{1000\cdot k}+\frac{\ln(1)}{1000\cdot k}=c\\ -\frac{\ln(-50+1000)}{1000\cdot k}+\frac{\ln(50)}{1000\cdot k}=c+4\end{bmatrix}\right\}$$

$$\rightarrow \{\{c=-6.9724,k=0.00099058\}\}$$

resolver

$$\left(-\frac{\ln(-x+1000)}{1000\cdot 0.00099058}+\frac{\ln(x)}{1000\cdot 0.00099058}=-6.9724+6\right)$$

$$\rightarrow \{\{x=276.23\}\}$$

Ejercicio 3

$$\text{resolver}(x'(t)=k\cdot(1000000-x(t)))$$

$$\rightarrow \left[\left[x(t)=\frac{1000000\cdot e^{k\cdot t}+c}{e^{k\cdot t}}\right]\right]$$

$$\text{resolver}\left[\begin{array}{l}\dfrac{1000000\cdot e^{k\cdot 0}+c}{e^{k\cdot 0}}=1\\ \dfrac{1000000\cdot e^{k\cdot 3}+c}{e^{k\cdot 3}}=150000\end{array}\right]$$

$$\rightarrow \{\{c=-1.\cdot 10^{6},k=0.054173\}\}$$

$$x(t)=\frac{1000000\cdot e^{0.054173\cdot t}-1.\cdot 10^{6}}{e^{0.054173\cdot t}}$$

$$\text{resolver}\left(\frac{1000000\cdot e^{0.054173\cdot t}-1.\cdot 10^{6}}{e^{0.054173\cdot t}}=750000\right)$$

$$\rightarrow \{\{t=25.59\}\}$$

Ejercicio 4

$$\text{resolver}(5\cdot v'(t)=5\cdot 9.81-10\cdot v(t))$$

$$\rightarrow \left[\left[v(t)=\frac{4.905\cdot e^{2.\cdot t}+c}{e^{2.\cdot t}}\right]\right]$$

$$\text{resolver}\left(\frac{4.905\cdot e^{2.\cdot 0}+c}{e^{2.\cdot 0}}=50\right) \rightarrow \{\{c=45.095\}\}$$

$$v(t)=\frac{4.905\cdot e^{2.\cdot t}+45.095}{e^{2.\cdot t}}$$

$$\int \frac{4.905\cdot e^{2.\cdot t}+45.095}{e^{2.\cdot t}}\,dt \rightarrow \frac{4.905\cdot t\cdot e^{2.\cdot t}-22.548}{e^{2.\cdot t}}$$

$$\text{resolver}\left(\frac{4.905\cdot 0\cdot e^{2.\cdot 0}-22.548}{e^{2.\cdot 0}}+c=0\right)$$

$$\rightarrow \{\{c=22.548\}\}$$

$$x(t)=\frac{4.905\cdot t\cdot e^{2.\cdot t}-22.548}{e^{2.\cdot t}}+22.548$$

resolver_numéricamente

$$\left(\frac{4.905\cdot t\cdot e^{2.\cdot t}-22.548}{e^{2.\cdot t}}+22.548=500\right)$$

$$\rightarrow \{t=97.34\}$$

Ejercicio 5

$$\text{resolver}\left(2\cdot v'(t)=-2\cdot 9.81-\frac{v(t)}{20}\right)$$

$$\rightarrow \left\{\left[v(t)=\frac{-392.4\cdot e^{0.025\cdot t}+c}{e^{0.025\cdot t}}\right]\right\}$$

$$\text{resolver}\left(\frac{-392.4\cdot e^{0.025\cdot 0}+c}{e^{0.025\cdot 0}}=200\right) \rightarrow \{\{c=592.4\}\}$$

$$v(t)=\frac{-392.4\cdot e^{0.025\cdot t}+592.4}{e^{0.025\cdot t}}$$

$$\text{resolver}\left(\frac{-392.4\cdot e^{0.025\cdot t}+592.4}{e^{0.025\cdot t}}=0\right) \rightarrow \{\{t=16.476\}\}$$

$$\int \frac{-392.4 \cdot e^{0.025 \cdot t} + 592.4}{e^{0.025 \cdot t}} \, dt$$

$$\rightarrow \frac{-392.4 \cdot t \cdot e^{0.025 \cdot t} - 23696.}{e^{0.025 \cdot t}}$$

$$\text{resolver}\left(\frac{-392.4 \cdot 0 \cdot e^{0.025 \cdot 0} - 23696.}{e^{0.025 \cdot 0}} + c = 0\right)$$

$$\rightarrow \{\{c = 23696.\}\}$$

$$x(t) = \frac{-392.4 \cdot t \cdot e^{0.025 \cdot t} - 23696.}{e^{0.025 \cdot t}} + 23696$$

$$\frac{-392.4 \cdot 16.476 \cdot e^{0.025 \cdot 16.476} - 23696.}{e^{0.025 \cdot 16.476}} + 23696 \rightarrow 1534.8$$

Ejercicio 6

$$\text{resolver}(T'(t) = k \cdot (30 - T(t))) \rightarrow \left[\left[T(t) = \frac{30 \cdot e^{k \cdot t} + c}{e^{k \cdot t}}\right]\right]$$

$$\text{resolver}\left[\begin{array}{l} \dfrac{30 \cdot e^{k \cdot 0} + c}{e^{k \cdot 0}} = 100 \\ \dfrac{30 \cdot e^{k \cdot 15} + c}{e^{k \cdot 15}} = 70 \end{array}\right] \rightarrow \{\{c = 70., k = 0.037308\}\}$$

$$T(t) = \frac{30 \cdot e^{0.037308 \cdot t} + 70}{e^{0.037308 \cdot t}}$$

$$\text{resolver}\left(\frac{30 \cdot e^{0.037308 \cdot t} + 70}{e^{0.037308 \cdot t}} = 40\right) \rightarrow \{\{t = 52.158\}\}$$