

PRÁCTICA 12: Ecuaciones Diferenciales de primer orden

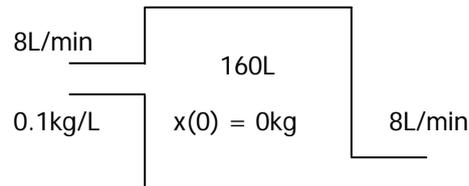
PROBLEMA 1

Un depósito contiene 160 litros de agua pura. Una solución acuosa de sal, que contiene 0,1 Kg. de sal por litro, se introduce en el depósito a una velocidad de 8 litros por minuto y la mezcla, bien agitada, sale del depósito a la misma velocidad.

- a) ¿Qué cantidad de sal contiene el depósito a los t minutos?
b) ¿Cuándo contendrá una concentración de 0,05 Kg. de sal por litro la mezcla que sale del depósito?

$x(t)$ = Kg. de sal dentro del depósito en el instante t

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 8 \cdot 0,1 - 8 \cdot \frac{x(t)}{160} \\ x(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$



$$\frac{dx}{dt} = \frac{128 - 8x}{160} = \frac{16 - x}{20} \Rightarrow \frac{dx}{16 - x} = \frac{dt}{20} \Rightarrow -\ln|16 - x| = \frac{t}{20} + C$$

$$\ln|16 - x| = -\frac{t}{20} + C \Rightarrow 16 - x = Ce^{-t/20} \Rightarrow x(t) = 16 + Ce^{-t/20}$$

$$x(t) = 16 + Ce^{-t/20} \stackrel{x(0)=0}{\Rightarrow} 0 = 16 + C \Rightarrow C = -16 \Rightarrow x(t) = 16 - 16e^{-t/20}$$

Así, la concentración será igual a:

$$C(t) = \frac{x(t)}{160} = \frac{16 - 16e^{-t/20}}{160} = \frac{1 - e^{-t/20}}{10}$$

$$0,05 = \frac{1 - e^{-t/20}}{10} \Rightarrow 0,5 = 1 - e^{-t/20} \Rightarrow e^{-t/20} = 0,5$$

$$t = -20 \cdot \ln(0,5) = 13,86 \text{ minutos}$$

PROBLEMA 2

A un objeto con masa de 5 Kg. se le aplica una velocidad inicial hacia abajo de 50 m/seg., y luego se le deja caer bajo la influencia de la gravedad. Suponer que la fuerza en Newtons debida a la resistencia del aire es de $-10v$, donde v es la velocidad del objeto medida en m/seg. Determinar la velocidad del objeto en cualquier instante. ¿Qué velocidad llevará al cabo de 2 minutos?, ¿cuánto tiempo ha tardado en llegar al suelo si lo hace con una velocidad de 5 m/seg.?

$$\left. \begin{array}{l} m \frac{dv}{dt} = mg - 10v \\ v(0) = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow 5 \frac{dv}{dt} = 5 \cdot 9,81 - 10v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 9,81 - 2v \Rightarrow \frac{dv}{9,81 - 2v} = dt$$

$$-\frac{1}{2} \ln |9,81 - 2v| = t + C \Rightarrow \ln |9,81 - 2v| = -2t + C \Rightarrow 9,81 - 2v = Ce^{-2t}$$

$$v(t) = 4,905 + C \cdot e^{-2t} \stackrel{v(0)=50}{\Rightarrow} 50 = 4,905 + C \Rightarrow C = 45,095$$

$$v(t) = 4,905 + 45,095 \cdot e^{-2t}$$

$$v(2) = 4,905 + 45,095 \cdot e^{-4} = 5,73094$$

$$5 = 4,905 + 45,095 \cdot e^{-2t} \Rightarrow 0,095 = 45,095 \cdot e^{-2t} \Rightarrow e^{-2t} = 0,00210666$$

$$-2t = \ln(0,00210666) = -6,16265 \Rightarrow t = 3,08132 \text{ segundos}$$

PROBLEMA 1

$$\text{resolver} \left(x'(t) = 8 \cdot 0.1 - 8 \cdot \frac{x(t)}{160} \right)$$

$$\rightarrow \left\{ \left[x(t) = \frac{16 \cdot e^{0.05 \cdot t} + c}{e^{0.05 \cdot t}} \right] \right\}$$

$$\text{resolver} \left(\frac{16 \cdot e^{0.05 \cdot 0} + c}{e^{0.05 \cdot 0}} = 0 \right) \rightarrow \{ \{ c = -16. \} \}$$

$$\text{resolver} \left(\frac{16 \cdot e^{0.05 \cdot t} - 16}{160 \cdot e^{0.05 \cdot t}} = 0.05 \right) \rightarrow \{ \{ t = 13.863 \} \}$$

PROBLEMA 2

$$\text{resolver} (5 \cdot v'(t) = 5 \cdot 9.81 - 10 \cdot v(t))$$

$$\rightarrow \left\{ \left[v(t) = \frac{4.905 \cdot e^{2 \cdot t} + c}{e^{2 \cdot t}} \right] \right\}$$

$$\text{resolver} \left(\frac{4.905 \cdot e^{2 \cdot 0} + c}{e^{2 \cdot 0}} = 50 \right) \rightarrow \{ \{ c = 45.095 \} \}$$

$$\frac{4.905 \cdot e^{2 \cdot 2} + 45.095}{e^{2 \cdot 2}} \rightarrow 5.7309$$

$$\text{resolver} \left(\frac{4.905 \cdot e^{2 \cdot t} + 45.095}{e^{2 \cdot t}} = 5 \right) \rightarrow \{ \{ t = 3.0813 \} \}$$