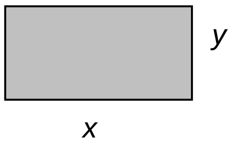
PROBLEMA 1:

En una explotación ganadera de vacuno se dispone de 400 m de alambre para construir una cerca rectangular. Si a cada animal hay que dejarle 10 m^2 de espacio, ¿cuántas vacas podremos meter como máximo dentro de la cerca?

Solución

Debemos encontrar el área máxima encerrada por la cerca de 400 m de perímetro. Si llamamos *x* e *y* a los lados del rectángulo, A al área y P al perímetro, tenemos:



$$A = xy$$

$$P = 2x + 2y = 400$$

Despejamos en la expresión del perímetro *y* en función de *x* para encontrar una relación entre las dos variables y sustituimos en el área. Así expresamos el área en función de *x* y derivamos para obtener el máximo:

$$400 = 2x + 2y \Rightarrow y = 200 - x \Rightarrow A = xy = x(200 - x) = 200x - x^2$$

$$A' = 200 - 2x \quad ; \quad A' = 0 \Rightarrow 200 - 2x = 0 \Rightarrow x = 100$$

x = 100 es un punto crítico. Si la segunda derivada es menor que cero en este punto, será máximo:

$$A'' = -2 < 0 \Rightarrow \text{máximo}$$

Sustituimos el valor máximo de *x* para obtener el correspondiente valor de *y*:

$$y = 200 - x = 200 - 100 = 100$$

Por tanto el área máxima será:

$$A = xy = 100 \cdot 100 = 10.000\ m^2$$

Si cada vaca ocupa 10 m^2, dividiendo obtendremos el número máximo de vacas que podemos encerrar en la cerca:

10.000 / 10 = 1.000 vacas

PROBLEMA 2:

Se sabe que la población de un determinado país crece a una razón proporcional al número de habitantes que viven actualmente en él. Si después de 10 años la población se ha triplicado y después de 20 años la población es de 150.000 habitantes, hallar el número de habitantes que había inicialmente en dicho país.

Solución

$x(t)$ = número de personas en el instante t
$x(0) = x_0$
$x(10) = 3\ x_0$
$x(20) = 150.000$

$$\frac{dx(t)}{dt} = k \cdot x(t) \Rightarrow \frac{dx}{x(t)} = kdt \Rightarrow \int \frac{dx}{x(t)} = \int kdt$$

$$\ln\left(x(t)\right) = kt + C \Rightarrow x(t) = Ce^{kt}$$

$$x(0) = x_0 \Rightarrow x_0 = C$$

$$x(10) = 3x_0 \Rightarrow 3x_0 = Ce^{10k} \Rightarrow 3x_0 = x_0e^{10k} \Rightarrow 3 = e^{10k} \Rightarrow k = 0{,}109861$$

$$x(20) = 150.000 \Rightarrow 150.000 = x_0e^{20k} \Rightarrow 150.000 = x_0e^{2{,}19722}$$

$$x_0 = 16.666{,}7 \approx 16.667 \text{ habitantes}$$

PROBLEMA 3:

A continuación se presentan 20 datos correspondientes al peso de 20 cobayas:

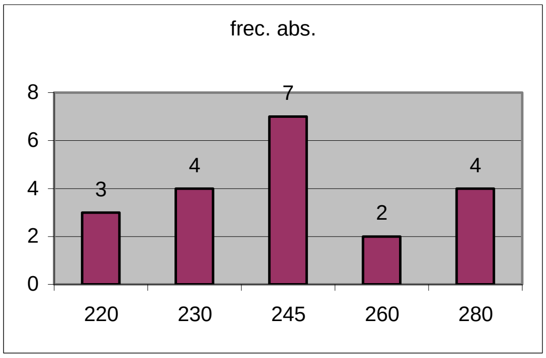
201	229	241	245	260	276	245	276	280	229
229	276	260	241	229	245	201	219	241	245

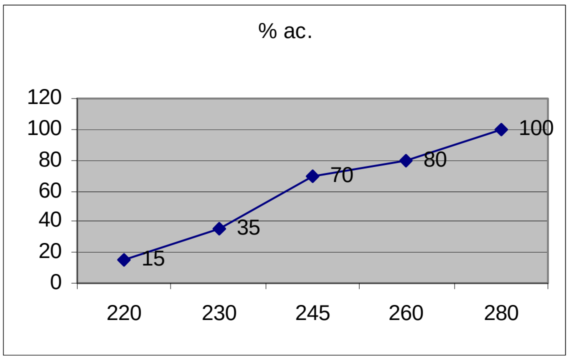
a) Realizar la tabla de frecuencias completa para la variable "peso" (agrupad datos en 5 grupos).
b) Representar en las gráficas correspondientes las frecuencias absolutas y los porcentajes acumulados. ¿Cómo se llaman estas gráficas?
c) Obtener la media, la desviación típica y la moda.
d) Señalar en la gráfica correspondiente y dar el valor aproximado de los siguientes puntos:
  1) El 60% de los datos recogidos tiene un peso superior ¿a qué valor?, ¿cómo se llama este punto y qué otro nombre tiene?
  2) El 32% de los datos recogidos tiene un peso inferior o igual ¿a qué valor?, ¿cómo se llama este punto?

a)

grupos	frec. abs.	frec. rel.	%	frec. abs. ac.	frec. rel. ac.	% ac.
220	3	0,15	15	3	0,15	15
230	4	0,2	20	7	0,35	35
245	7	0,35	35	14	0,7	70
260	2	0,1	10	16	0,8	80
280	4	0,2	20	20	1	100
	20	1	100			

b)





c) MEDIA: 243,4
DESVIACIÓN TÍPICA: 23,0865648
MODA: 229 y 245

d) **1)** 241. Percentil 40 o decil 4
2) 229,96. Percentil 32

PROBLEMA 4:

1. En una explotación ganadera especializada en vacas lecheras, se conocen, por la experiencia acumulada en los últimos años, las necesidades alimenticias de este tipo de ganado referentes a tres tipos de nutrientes: Proteína Bruta (PB), Energía Neta de Lactancia (ENL), y Fibra Bruta (FB), las cuales quedan reflejadas en la tabla siguiente:

NECESIDADES NUTRITIVAS

	PB (gramos)	ENL (Mcal)	FB (gramos)
MÁXIMO			2.000
MÍNIMO	1.500	16	

Un productor especializado en alimentación animal les ofrece dos nuevos tipos de alimentos, un complemento de forraje de producción ecológica controlada y un concentrado alimenticio desarrollado en sus laboratorios de investigación. La composición y precio por Kilogramo de cada uno de los alimentos es:

ALIMENTOS	PB (gramos)	ENL (Mcal)	FB (gramos)	PRECIO €
Forraje	200	2	300	50
Concentrado	150	4	100	110

Plantear el problema de Programación Lineal que permita encontrar las cantidades de forraje y concentrado que se les debe administrar a las vacas lecheras para garantizar su adecuada ingesta de nutrientes con un coste mínimo para nuestra explotación ganadera.

Solución

X_1 = kilos de forraje
X_2 = kilos de concentrado

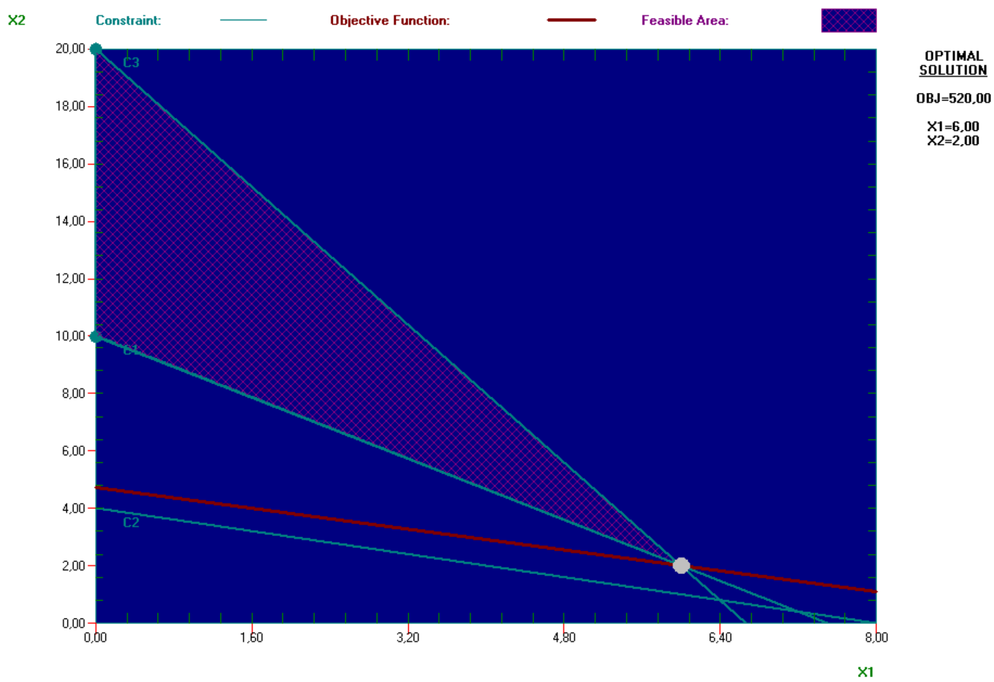
Min $\quad 50x_1 + 110x_2$

s.a.: $\quad 200x_1 + 150x_2 \geq 1.500$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 16$$
$$300x_1 + 100x_2 \leq 2.000$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. Para dar la solución del problema, realiza los siguientes pasos:

A) Dibuja la región de factibilidad.



B) Calcula los vértices de la región de factibilidad.

$$\left.\begin{aligned}200x_1+150x_2&=1.500\\300x_1+100x_2&=2.000\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}4x_1+3x_2&=30\\3x_1+x_2&=20\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad x_2=20-3x_1$$

$$4x_1+3(20-3x_1)=30\Rightarrow 4x_1+60-9x_1=30\Rightarrow x_1=6\Rightarrow x_2=2$$

$$\left.\begin{aligned}200x_1+150x_2&=1.500\\x_1&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}150x_2&=1.500\\x_1&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x_1&=0\\x_2&=10\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}x_1&=0\\300x_1+100x_2&=2.000\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x_1&=0\\x_2&=20\end{aligned}\right\}$$

C) Obtén el valor de la función objetivo en esos vértices.

$$\left.\begin{aligned}&A(6,2)\Rightarrow z=50\cdot6+110\cdot2=300+220=520\\&B(0,10)\Rightarrow z=50\cdot0+110\cdot10=0+1.100=1.100\\&C(0,20)\Rightarrow z=50\cdot0+110\cdot20=0+2.200=2.200\end{aligned}\right\}\Rightarrow A(6,2)$$

D) ¿Cuál es el valor mínimo de la función objetivo?

$$A(6,2)\Rightarrow z=50\cdot6+110\cdot2=300+220=520$$