Cuestiones de Aplicaciones Lineales

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Si $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es una base de V, entonces:
   (a) $\{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$ es base de W.
   (b) $\{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$ es sistema generador de W.
   (c) $\{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$ es una familia ligada de W.
   (d) En general, ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta.

2. Sea $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ tal que $f(1,1) = (2,1)$ y $f(0,1) = (1,1)$. Entonces:
   (a) $f(1,0) = 1\,f(2,1) + 0\,f(0,1)$.
   (b) $f(1,0) = (1,0)$.
   (c) $f(1,0) = (3,5)$.
   (d) No podemos conocer $f(1,0)$, la aplicación lineal f no está bien definida.

3. Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $h \in \operatorname{End}(V)$ tal que $\operatorname{Ker} h = \{0_V\}$. Entonces:
   (a) h biyectiva.
   (b) $\operatorname{Im} h \neq V$.
   (c) $h(v) = 0_V,\ \forall v \in V$.
   (d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta.

4. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz coordenada respecto de la base canónica es
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$
   entonces se tiene que dicha aplicación lineal es
   (a) inyectiva y no suprayectiva,
   (b) biyectiva,
   (c) suprayectiva y no inyectiva,
   (d) ninguna es cierta.

5. Sea $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ dado por $f(x,y) = (x+y, y)$ con ecuación coordenada respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ $Y = AX$. Entonces:
$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \text{c) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \ \text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz coordenada es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

entonces se tiene que dicha aplicación lineal es

(a) no es inyectiva,

(b) biyectiva,

(c) suprayectiva,

(d) ninguna es cierta.

7. Sea $f : V \longrightarrow W$ aplicación lineal, $\dim V = n$, $\dim W = m$ con $n < m$. Entonces

(a) f es suprayectiva,

(b) f es inyectiva,

(c) f no puede ser suprayectiva,

(d) f no puede ser inyectiva.

8. Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ definido por $f(x, y) = (x + y, 2y)$.
Si $Y = AX$ es la ecuación coordenada de f respecto de la base $\{(1, 1), (3, -1)\}$, la matriz A será:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Sean $h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ y $\{v_1, v_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ tal que $h(v_1) = v_1 - v_2$ y $v_2 \in \mathrm{Ker}\, h$.
Entonces, la matriz coordenada de h respecto de $\{v_1, v_2\}$ es

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Considera h definido en la cuestión anterior. Entonces,

(a) $\mathrm{Im}\, h = \mathbb{R}^2$.

(b) $\mathrm{Im}\, h = \mathbb{R}\langle\{v_1, v_2\}\rangle$.

(c) $\mathrm{Im}\, h = \mathbb{R}\langle(1, -1)\rangle$.

(d) $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker} h \oplus \mathrm{Im} h$.

Problema adicional.

Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ tal que

$$f(1+x^2) = 1-x, \quad f(1-x) = 2+2x \quad f(x) = 0.$$

1. Calcula $f(2+x^2)$.
2. Halla Imf. Razona si f es suprayectiva.
3. Halla una base de Ker$f$.
4. Halla B la matriz coordenada de f respecto de $\{1+x^2,\, 1-x,\, x\}$ y $\{1-x,\, 2+2x\}$ (bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}_1[x]$, respectivamente).
5. Denotamos por A a la matriz coordenada de f respecto de $\{1, x, x^2\}$ y $\{1, x\}$ (bases canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}_1[x]$, respectivamente). Prueba que existen P y Q tales que $A = PBQ$.