Cuestiones de Valores Propios

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1. Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con $h \in \text{End}\,(V)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ valor propio de h. Entonces:
   (a) $\exists v \in V$ tal que $h(v) = \lambda v$.
   (b) $\exists v \in V$ tal que $h(\lambda v) = \lambda v$.
   (c) $\exists v \in V \backslash \{0_V\}$ tal que $h(v) = \lambda v$.
   (d) $\exists v \in V \backslash \{0_V\}$ tal que $h(\lambda v) = \lambda v$.

2. $h \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ con dim Im$h = 2$, y $(x-1)(x+2)$ divide al polinomio característico de h. Entonces:
   (a) h es diagonalizable.
   (b) h no es diagonalizable.
   (c) h es biyectiva.
   (d) el 0 no es valor propio.

3. Sea V espacio vectorial real de dimensión 5 y $h \in \text{End}\,(V)$ de polinomio característico $(x+1)^2(x-3)^3$. Entonces:
   (a) h no es diagonalizable pues $m(-1) = 2$ y $m(3) = 3$.
   (b) h es diagonalizable pues los valores propios reales.
   (c) h será diagonalizable si $\dim V(-1) = 2$ y $\dim V(3) = 3$.
   (d) h no es una aplicación inyectiva.

4. Sea $h \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ con λ_1, λ_2, λ_3 valores propios reales tales que $\dim V(\lambda_1) = 1$, $\dim V(\lambda_2) = 2$. Entonces
   (a) h no es diagonalizable.
   (b) $\lambda_3 = \lambda_1$.
   (c) $\lambda_3 = \lambda_2$.
   (d) Si h es diagonalizable, todos los valores propios han de ser no nulos.

5. Sea $h \in \text{End}(V)$, con V e.v. sobre K de dimensión finita y $A \in \mathcal{M}_n(K)$ matriz coordenada de h respecto de una base dada.
   (a) Ker$h \neq \{0_V\} \Longleftrightarrow \lambda = 0_K$ no es valor propio.
   (b) h inyectiva $\Longleftrightarrow \lambda = 0_K$ no es valor propio.
   (c) $|A| \neq 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0_K$ es valor propio.
   (d) h biyectivo $\Longleftrightarrow |A| = 0$.

6. Sea V espacio vectorial sobre real y $h \in \mathrm{End}\,(V)$ tal que $\mathrm{Ker}\, h = \{0_V\}$. Entonces:

   (a) si $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de h entonces $\lambda \neq 0$.

   (b) $\lambda = 0$ es valor propio de h.

   (c) $\lambda = 0$ siempre es un valor propio simple de h, puesto que, para todo $v \in V$, $h(v) = 0\,v$.

   (d) No se puede afirmar nada, pues para saber si en este caso $\lambda = 0$ es valor propio de h, se necesitaría conocer el polinomio característico de h.

7. Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $h \in \mathrm{End}\,(V)$ tal que $\mathrm{Ker}\, h = \{0_V\}$. Entonces:

   (a) h biyectiva.

   (b) $\mathrm{Im}\, h \neq V$.

   (c) $h(v) = 0_V,\ \forall v \in V$.

   (d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta.

8. Sea $h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ de ecuación coordenada respecto de la base $\{a_i\}_{i=1}^3 : Y = AX$. Además con respecto a la base $\{v_i\}_{i=1}^3$ se satisface

$$h(v_1) = v_1, \quad h(v_2) = -v_2, \quad h(v_3) = (0,0,0).$$

   Si denotamos por B a la matriz coordenada de h respecto de $\{v_i\}_{i=1}^3$ y definimos P regular tal que $(a_i)^t = (v_i)^t P$ se tiene que

   (a) $A = P^{-1}BP$.

   (b) $A = P^t BP$.

   (c) $B = P^{-1}AP$.

   (d) $B = P^{-1}BP$.

9. Considera el endomorfismo h anterior. Entonces

   (a) Como A y B son matrices semejantes y $P^{-1}P = I_3$ se tiene que $A^n = B^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (b) $A^{2n+1} = A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (c) $A^{1/2} = B^2$.

   (d) En general ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta. Necesitaríamos conocer explícitamente A para contestar.

10. Sean $h \in \mathrm{End}\,(\mathbb{R}^2)$ y $\{v_1, v_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ tal que $h(v_1) = v_1 - v_2$ y $v_2 \in \mathrm{Ker}\, h$. Entonces

    (a) h es diagonalizable y $\{v1, v2\}$ es una base de vectores propios.

    (b) Si definimos $S_1 = \mathbb{R}\langle(v1 - v2)\rangle$ y $S_2 = \mathbb{R}\langle(v2)\rangle$ entonces S_1 y S_2 son suplementarios.

    (c) h es suprayectiva puesto que $\mathrm{Im}\, h = \mathbb{R}\langle\{v_1, v_2\}\rangle$.

    (d) h es suprayectiva, pero no es inyectiva.

Problema adicional.

Sea $h \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ de ecuación coordenada $Y = AX$ respecto de la base canónica, la cual no necesitas conocer explícitamente.

A continuación realizamos unos cálculos con MatLab.

```
>> eig(A)
ans =
     1
    -1
    -2
     1
>> null(eye(4)-A,'r')
ans =
    -1     0
     1     0
     0     1
     0     1
>> null(-eye(4)-A,'r')
ans =
     0
     0
    -1
     1
>> null(-2*eye(4)-A,'r')
ans =
     0
    -1
     1
     0
```

Teniendo en cuenta **únicamente** estos cálculos realizados con MatLab contesta de forma razonada a las siguientes preguntas:

1. Determina las ecuaciones paramétricas de todos los subespacios fundamentales.

2. Halla $\text{Ker}\, h$ e $\text{Im}\, h$.

3. ¿h es biyectiva? (Razona la respuesta)

4. Considera un valor propio λ (el que quieras) y su subespacio fundamental $V(\lambda)$. Determina un subespacio T tal que $\mathbb{R}^4 = V(\lambda) \oplus T$.

5. Discute la existencia y unicidad de solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$.