Cuestiones de Formas Bilineales

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1. Sea V un espcacio vectorial real dimensión finita y $F : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Entonces

   (a) $F(\lambda v, \lambda v) = \lambda F(v, v), \quad \forall v \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

   (b) $F(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 F(v, v), \quad \forall v \in V\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

   (c) $F(\lambda v, \lambda v) = \lambda F(v) + \lambda F(v), \quad \forall v \in V.$

   (d) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ verifica $F(\lambda v, \lambda v) = \lambda F(v, v)$ entonces λ es valor propio y v un vector propio asociado.

2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(\,(x_1, x_2),\, (y_1, y_2)\,) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_2$.

   (a) F no es una forma bilineal.

   (b) F es una forma bilineal simétrica.

   (c) F es una forma bilineal no simétrica.

   (d) F es una aplicación lineal.

3. Considera F definida en la cuestión anterior. La matriz coordenada de F respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Considera $V = \mathbb{R}_1[x]$ y la forma bilineal $F(\,a_0 + a_1x\,,\, b_0 + b_1x\,) = 2a_1b_1 - a_1b_0 - a_0b_1$. La expresión coordenada de F respecto de la base canónica $\{1, x\}$ es

   a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

   c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Sea $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de expresión coordenada respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$: $F(u, v) = X^tAY$ con

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) A es semidefinida positiva.

   (b) $\{(-2, 1), (1, 0)\}$ es una base una base $A-$conjugada.

   (c) $\{(0, 1), (-2, 1)\}$ es una base una base $A-$conjugada.

   (d) Como $F((0, 1), (0, 1)) = 0$ toda base $A-$conjugada deberá contener al vector $(0, 1)$.

6. Sean Q_1 y Q_2 dos formas cuadráticas sobre V ambas definidas positivas con expresiones coordenadas respecto de la base $\{a_i\}_{i=1}^n$ X^tAX y X^tBX, respectivamente.

   (a) A y B son matrices congruentes.

   (b) A y B tienen los mismos valores propios, por tanto son semejantes.

   (c) A y B son matrices congruentes semejantes.

   (d) No existe *a priori* ninguna relación entre A y B.

7. Sean Q_1 y Q_2 dos formas cuadráticas sobre V ambas definidas positivas con expresiones coordenadas respecto de la base $\{a_i\}_{i=1}^n$ X^tAX : y X^tBX, respectivamente.

   (a) $A+B$ es definida positiva.

   (b) $A+B$ es semidefinida positiva.

   (c) No podemos afirmar nada sobre el rango y la signatura de $A+B$.

   (d) En general, $A+B$ será indefinida.

8. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ forma cuadrática de expresión coordenada respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$: $Q(u) = X^tAX$ tal que $\lambda_1 = \lambda_2 = a$, $\lambda_3 = b$ son los valores propios de A. Entonces:

   (a) si $a > b$ entonces Q es definida positiva,

   (b) si $a > b$ y $b = 0$ entonces Q es definida positiva,

   (c) si $a < b$ y $b = 0$ entonces Q es semidefinida negativa,

   (d) ninguna de las anteriores es cierta.

9. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ simétrica con valores propios 5, 3 y -2. Entonces

   (a) A es singular,

   (b) A es semidefinida positiva,

   (c) A es indefinida,

   (d) $|A^{-1}| = 0$.

10. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica congruente con la matriz diagonal D. Entonces

    (a) $|D| = |A|$.

    (b) Los valores propios de A son los mismos que los valores propios de D.

    (c) A puede no ser diagonalizable, luego la signatura de A y D puede ser distinta.

    (d) A y D tienen el mismo rango y la misma signatura.