Cuestiones de Espacio Euclídeo

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1. Considera $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de expresión coordenada respecto de la base canónica $X^t AY$ donde
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) F es un producto escalar.
   (b) F es una forma cuadrática indefinida.
   (c) F es una forma cuadrática definida positiva.
   (d) $F(\lambda u, \lambda v) = \lambda F(u, v)$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, luego
   (a) si A es regular entonces es ortogonal,
   (b) si A es ortogonal entonces es regular,
   (c) si A es simétrica entonces es ortogonal,
   (d) si A es ortogonal entonces es simétrica.

3. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica, entonces
   (a) existen P ortogonal y D diagonal tal que $D = P^{-1}AP$,
   (b) existen P regular y D diagonal con $d_{ii} = 0, 1$ ó -1 tal que $D = P^{-1}AP$,
   (c) existen P ortogonal y D diagonal con $d_{ii} = 0, 1, -1$ tal que $D = P^t AP$,
   (d) existen P simétrica y D diagonal tal que $D = P^t AP$.

4. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica y definida positiva. Consideramos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar dado por $X^t AY$, entonces
   (a) La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es unitaria.
   (b) La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es ortogonal, pero no es unitaria.
   (c) La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es ortonormal.
   (d) En general, ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta.

5. Considera V un espacio euclídeo con el producto $(\cdot, \cdot)$ y los vectores $v_1, v_2 \in V$ linealmente independientes. Buscamos un vector $\widetilde{v}_2 = v_1 + \alpha v_2$ con $\widetilde{v}_2 \perp v_2$, entonces
   (a) $\alpha = (v_1, v_2)$,
   (b) $\alpha = -(v_2, v_1)$,
   (c) $\alpha = (v_2, v_1)/(v_1, v_1)$,
   (d) $\alpha = -(v_2, v_1)/(v_2, v_2)$.

6. Una matriz $P \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es ortogonal si

   (a) $P^tP = P^{-1}P = I_n$,
   (b) $P^tP = I_n$,
   (c) $PP^t = I_m$,
   (d) $P^tP = I_n$ y $PP^t = I_m$.

7. En $\mathbb{R}_2[x]$ considera el producto escalar
$$(\, a_0 + a_1x + a_2x^2,\, b_0 + b_1x + b_2x^2\,) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$
   La norma de $p(x) = 1 + x - x^2$ es

   (a) 1,
   (b) 3,
   (c) $\sqrt{3}$,
   (d) -1.

8. Considera el espacio euclídeo $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto escalar anterior. Entonces la norma de $3x^2 - 3x - 3$ es

   (a) -3,
   (b) 3,
   (c) $-3\sqrt{3}$,
   (d) $3\sqrt{3}$.

9. En $\mathbb{R}^2$ consideramos el producto escalar $(X, Y) = X^T A Y$ con
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
   y su norma asociada $\|\cdot\|$. Entonces, si $v = (1, 1)$ se cumple

   (a) $\|v\| = \sqrt{7}$,
   (b) $\|v\| = \sqrt{2}$,
   (c) $\|v\| = 2$,
   (d) $\|v\| = 0$.

10. Si en $\mathbb{R}_2[x]$ consideramos el producto escalar
$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$
    y definimos $p(x) = \sqrt{3}\,(1 - x)$ y $q(x) = 1$ se cumple que

    (a) $(p, q) = 1 + 3(x - 1)^2$,
    (b) p y q son ortogonales,
    (c) p y q son unitarios,
    (d) $(p, q) = \sqrt{1 + 3(x - 1)^2}$.

Problema

1. Considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Halla una matriz P ortogonal tal que $D = P^t\, A\, P$ sea diagonal.

   (b) Determina el rango y la signatura de A.

   (c) Justifica si $\mathbb{R}^3$ con $(u, v)_A = X^t A Y$ (siendo X e Y las coordenadas de u y v respecto la base canónica) es o no un espacio euclídeo.