Matrices y sistemas lineales

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1 Matrices elementales

En esta sección vamos a crear funciones en MATLAB que nos permitan construir matrices elementales. Para ello, en primer lugar, abrimos un m-fichero nuevo:

$$File \;\rightarrow\; New \;\rightarrow\; m - file$$

y en este fichero en blanco copiamos:

```
function P=pij(i,j,n)
P=eye(n);
P(i,i)=0;
P(j,j)=0;
P(i,j)=1;
P(j,i)=1;
return
```

Guardamos el fichero con el mismo nombre que le hemos dado a la función, es decir,

$$File \;\rightarrow\; Save\,as : \texttt{pij.m}$$

Ya tenemos la función que nos genera las matrices elementales P_{ij}. Comprueba que funciona correctamente con los siguientes ejemplos y antes de ejecutar las órdenes piensa cuál debe ser el resultado que se debe obtener.

```
>> pij(1,2,3)
>> A=[1 2 3;4 5 6; 7 8 9]
>> pij(1,2,3)*A
>> A*pij(2,3,3)
```

Completa el fichero `pijt(i,j,t,m)` de forma que con la función que en él se define se construyan las matrices elementales $P_{ij}(t)$.

```
function P=pijt(i,j,t,n)
P=eye(n);
P(i,j)=..........
return
```

Comprueba que esta función está bien definida ejecutando las siguientes órdenes en MATLAB; al igual que antes piensa antes de ejecutarlas cuál es el resultado que se debe obtener.

```
>> pijt(1,2,3,3)
>> pijt(2,1,-1,3)*A
>> A*pijt(2,1,-1,3)
>> A*pijt(1,2,-1,3)
>> pijt(2,3,-1,5)*A
```

Procede de forma análoga a los casos anteriores y define una función en MATLAB de la forma `qis(i,s,n)` con la que se construyan las matrices $Q_i(s)$. Comprueba que lo has hecho bien ejecutando los siguientes ejemplos:

```
>> qis(3,-4,5)
>> qis(3,-4,3)*A
>> A*qis(1,2,3)
```

2 Cálculo de la inversa

En esta sección vamos a utilizar las matrices elementales para calcular la inversa de una matriz regular. Termina el siguiente ejemplo:

```
>> A=[3 -2 1; 1 1 3; -1 2 1]
>> A1=[A eye(3)]
>> A2=pij(1,2,3)*A1
>> A3=pijt(2,1,-3,3)*A2
>> %continua el ejercicio
```

Comprueba que lo has hecho bien utilizando la orden en MATLAB `inv(A)`.

Nota: También podríamos haber calculado A^{-1} haciendo operaciones elementales por columnas.

3 Eliminación gaussiana

Considera el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. La técnica de eliminación de Gauss consiste en realizar operaciones elementales sobre las ecuaciones de este sistema de forma que se obtenga un sistema equivalente

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

donde la matriz de coeficientes U es triangular superior. Si utilizamos notación matricial, la idea es la hacer operaciones elementales sobre la matriz ampliada hasta "triangular" la matriz de coeficientes, es decir,

$$(A|\mathbf{b}) \ -\text{operaciones elemetales} \rightarrow \ (U|\mathbf{y})$$

con U matriz triangular superior.

Trasforma el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

en un sistema triangular superior equivalente.

4 Factorización LU

Sea A una matriz regular. La factorización LU consiste en descomponer la matriz A como producto de dos matrices

$$A = LU$$

donde L es triangular inferior con elementos diagonales $l_{ii} = 1$ y U es una matriz triangular superior.

Esta factorización no siempre existe, el siguiente resultado nos da una condición suficiente para la existencia de esta factorización.

Teorema. Sea A una matriz regular tal que las n submatrices

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n$$

son todas regulares. Entonces existen una única matriz triangular inferior L con $l_{ii} = 1$ y una única matriz U triangular superior tales que $A = LU$.

En la práctica, se comprueba que esta factorización existe cuando es posible aplicar la técnica de eliminación de Gauss sin intercambio de filas, de hecho, la factorización LU se puede interpretar como "la versión matricial" de la eliminación gaussiana (sin intercambio de filas). La matriz U es la matriz triangular superior obtenida tras aplicar el proceso de eliminación de Gauss a la matriz A. De modo que, si denotamos por $P_1, P_2, \dots P_r$ a las matrices elementales utilizadas en el proceso de triangulación de la matriz A, se tiene que

$$P_r \dots P_2 P_1 A = U,$$

luego

$$A = (P_1^{-1})(P_2^{-1}) \dots (P_r^{-1})U.$$

Si cada una de estas matrices elementales utilizadas son del tipo $P_{ij}(t)$ con $i > j$ (triangulares inferiores con 1's en la diagonal), entonces

$$L = (P_1^{-1})(P_2^{-1}) \dots (P_r^{-1}).$$

Recuerda: $(P_{ij}(t))^{-1} = P_{ij}(-t)$.

Completa el siguiente ejemplo.

```
>> A=[1 -2 1; 1 1 3; -1 2 1]
A =

     1    -2     1
     1     1     3
    -1     2     1
```

```
>> A1=pijt(2,1,-1,3)*A
A1 =

     1    -2     1
     0     3     2
    -1     2     1

>> % continua
>> A2=...
```

¿Cuál es la factorización LU de A?

Observa que la matriz L es tal que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

donde los elementos l_{ij} con $1 \leq j < i \leq n$ son los opuestos de los multiplicadores utilizados para "conseguir" un cero en el elemento a_{ij}.

Como ya se ha comentado, no siempre existe la factorización LU de una matriz regular A, sin embargo siempre es posible reordenar sus filas de modo que la matriz "reordenada" $B = PA$ (P matriz permutación) sí admite factorización LU.

Si A admite factorización LU, podemos utilizar dicha descomposición para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, así,

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \text{ (sistema triangular inferior)}, \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ (sistema triangular superior)}. \end{array} \right.$$

Esta forma de proceder es más práctica (desde el punto de vista computacional) cuando se tienen que resolver varios sistemas con la misma matriz de coeficientes y distintos términos independientes. En este caso, sólo será necesario realizar una sola vez la factorización LU y luego resolver una colección de sistemas triangulares.

5 Ejercicios propuestos

1. Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.

   (b) Utiliza las matrices elementales para realizar la factorización LU de la matriz de coeficientes (reordenando, previamente, sus filas si fuera necesario).

(c) Usa convenientemente esta factorización para obtener la solución del sistema y para calcular el determinante de la matriz de coeficientes.

2. Discute si los siguientes sistemas de ecuaciones son compatibles (determinado o indeterminado) o incompatibles.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Determina la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$