Espacios vectoriales

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1 Familias equivalentes de vectores

Recuerda: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y consideramos dos familias de vectores de V que denotamos por $\{a_i\}_{i\in I}$ y $\{b_j\}_{j\in J}$, respectivamente. Estas familias se dicen *equivalentes* si

$$\mathbb{K}\langle\{a_i\}_{i\in I}\rangle = \mathbb{K}\langle\{b_j\}_{j\in J}\rangle.$$

Ejercicio. A partir de la familia de vectores de $\mathbb{R}^4$ $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ determina una familia equivalente y **libre**.

```
>> a1=[2 -1 0 3];a2=[-1 -4 12 -15];a3=[1 1 -4 6];a4=[-5 9 6 8];a5=[-3 4 5 1];
>> A=[a1;a2;a3;a4;a5]
A =
      2            -1             0             3
     -1            -4            12           -15
      1             1            -4             6
     -5             9             6             8
     -3             4             5             1
>> A1=pijt(5,1,3/2,5)*pijt(4,1,5/2,5)*pijt(3,1,-1/2,5)*pijt(2,1,1/2,5)*A
A1 =
      2            -1             0             3
      0          -9/2            12         -27/2
      0           3/2            -4           9/2
      0          13/2             6          31/2
      0           5/2             5          11/2
>> %termina el ejercicio
```

Considera los subespacios $S = \mathbb{R}\langle\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}\rangle$, $T_1 = \mathbb{R}\langle\{(1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}\rangle$. Entonces:

1. Estudia si S y T_1 son suplementarios respecto de $\mathbb{R}^4$.

2. Determina un nuevo subespacio T_2 que sea suplementario a S respecto de $\mathbb{R}^4$.

3. A partir de las bases de S y T_2 construye una base de $\mathbb{R}^4$.

2 Cambio de base

Ejercicio. Considera la base de $\mathbb{R}^4$

$$\{b_1, b_2, b_3, b_4\} = \{(2, -1, 0, 3), (0, -9/2, 12, -27/2), (0, 0, 35/3, -2), (0, 0, 0, 1)\}$$

y los vectores $u = (2, -1, 0, 4)$ y $v = (0, -18, 48, -54)$. Calcula las coordenadas de u y v respecto de la base $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

Nota. La orden `>>A\b` nos proporciona la solución del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Recuerda: Sean $\{v_1, \cdots, v_n\}$ y $\{\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_n\}$ dos bases de V. Como los vectores $\tilde{v}_i$ están en V, tendrán unas coordenadas respecto de la base $\{v_i\}$, es decir,

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= \lambda_{11}\, v_1 + \cdots + \lambda_{n1}\, v_n \\ &\vdots \\ \tilde{v}_n &= \lambda_{1n}\, v_1 + \cdots + \lambda_{nn}\, v_n \end{aligned}$$

Matricialmente

$$(\tilde{v}_i)^t = (v_i)^t P$$

siendo P la matriz regular cuyas columna i-ésima está formada por las coordenadas de $\tilde{v}_i$ respecto de la base $\{v_i\}_{i=1}^n$ y que se denomina *matriz de cambio de base.*

Sea $v \in V$ y denotamos por:

$X = (x_1, \cdots, x_n)^t$ coordenadas de v respecto de la base $\{v_i\}$

$\widetilde{X} = (\widetilde{x}_1, \cdots, \widetilde{x}_n)^t$ coordenadas de v respecto de la base $\{\widetilde{v}_i\}$

Como $(\tilde{v}_i)^t = (v_i)^t P$ (P matriz de cambio de base), se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = (v_i)^t X \\ v = \tilde{x}_1 \tilde{v}_1 + \cdots + \tilde{x}_n \tilde{v}_n = (\tilde{v}_i)^t \tilde{X} = (v_i)^t P \tilde{X} \end{array}\right\} \Longrightarrow X = P\tilde{X}$$

(relación entre las coordenadas en ambas bases).

Ejercicio. Halla la matriz de cambio de base entre la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y la nueva base $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

Ejercicio. Utiliza la matriz de cambio de base calculada en el apartado anterior para comprobar que has calculado bien las coordenadas de u y v respecto de la base $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

Ejercicio. Considera $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y la base

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -9/2 \\ 12 & -27/2 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 35/3 & -2 \end{pmatrix},\ B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Justifica (haciendo uso del isomorfismo coordenado) cuáles han de ser las coordenadas de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

respecto de la base $\{B_1, B_2, B_3, B4\}$ y cuál será la matriz de cambio de base entre la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y la nueva base $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$.

3 Ejercicios propuestos

1. En cada uno de los siguientes casos determina una base de S subespacio de V:

   (a) $V = \mathbb{R}^5$ y $S = \mathbb{R} < \{(1,-1,0,2,0),\ (0,0,-1,0,1),\ (1,-1,1,1,0),\ (0,0,1,1,1)\} >$

   (b) $V = \mathbb{R}_3[x]$ y $S = \mathbb{R} < \{\ (x^2-1),\ (3x^2+1),\ x^3,\ (2x^3+4x^2)\ \} >$.

   (c) $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $S = \mathbb{R} < \{A_1, A_2, A_3, A_4\} >$, donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Considera el polinomio $p(x) = 5x^4 + 6x^3 - 4x + 2 \in \mathbb{R}_4[x]$.

   (a) Halla las coordenadas de $p(x)$ respecto de las bases
   $B_1 = \{\ 1,\ (x-2),\ (x-2)^2,\ (x-2)^3,\ (x-2)^4\ \}$,
   $B_2 = \{\ 1,\ x,\ x(x-1),\ x(x-1)(x-2),\ x(x-1)(x-2)(x-3)\ \}$.

   (b) Determina las matrices de cambio de bases entre:
   - la base canónica de $\mathbb{R}_4[x]$ y B_1 (denota a esta matriz por P_1),
   - la base canónica de $\mathbb{R}_4[x]$ y B_2 (denota a esta matriz por P_2).

   (c) Deduce, en términos de las matrices P_1 y P_2, la matriz de cambio de base entre las bases B_1 y B_2.

3. Considera la familia de matrices $B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Comprueba que $B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ es una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Calcula las coordenadas (respecto de la base B) de las matrices

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y se consideran los subespacios vectoriales:

$$S = \mathbb{R} < \{(1,2,1),\ (1,3,2)\} >,\quad T = \mathbb{R} < \{(1,1,0),\ (3,8,5),(2,7,5)\} > .$$

   Estudia si $S = T$.