Aplicaciones lineales.

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1 Ejemplo resuelto

A continuación se presenta un ejercicio resuelto para ilustrar cómo funcionan las "nuevas" órdenes en MATLAB que puedes necesitar para resolver los ejercicios propuestos en la práctica.

Considera $f \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, 2x_2 + 2x_3).$$

1. Dado $v = (1, 2, -5) \in \mathbb{R}^3$, determina $f(v)$.

```
>>%Definimos f
>> syms x1 x2 x3
>> f=[x2+x3,2*x2+2*x3]
f =
[     x2+x3, 2*x2+2*x3]
>> fv=subs(f,{x1,x2,x3},{1,2,-5})
fv =
[ -3, -6]
```

2. Calcula $\mathrm{Im}\, f$.

   Sabemos que si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, entonces $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}\langle\{f(v_1), f(v_2), f(v_3)\}\rangle$. Luego, considerando las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ se tiene:

```
>> fe1=subs(f,{x1,x2,x3},{1,0,0})
fe1 =
[ 0, 0]
>> fe2=subs(f,{x1,x2,x3},{0,1,0})
fe2 =
[ 1, 2]
>> fe3=subs(f,{x1,x2,x3},{0,0,1})
fe3 =
[ 1, 2]
```

   De donde se deduce que: $\mathrm{Im}\ f = \mathbb{R}\langle\{(1, 2)\}\rangle$, luego f no es suprayectiva ni inyectiva, puesto que $\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$.

3. Matriz coordenada (por columnas) de f respecto de las bases canónicas.

```
>> A=[fe1' fe2' fe3']
A =
[ 0, 1, 1]
[ 0, 2, 2]
>>% observa que
>> rank(A)
ans =
1
```

4. Base del núcleo

```
>> null(A)
ans =
[  1,  0]
[  0, -1]
[  0,  1]
```

Nota. La orden `null(A,'r')` nos proporciona una base ("racional") del núcleo.

Luego $\{(1,0,0),(0,-1,1)\}$ es una base del núcleo. Recuerda que ya sabíamos que la dimensión del núcleo era dos ($\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$). Por tanto,

$$\operatorname{Ker} f = \{\, (x_1, x_2, x_3) \,/\, x_2 + x_3 = 0 \,\}.$$

5. Determina B, matriz coordenada de f respecto del par de bases

$$\{v_i\}_{i=1}^3 = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,0,0)\}$$
$$\{w_j\}_{j=1}^2 = \{(1,2),(0,-1)\}$$

Sean $\{e_i\}_{i=1}^3$ y $\{E_j\}_{j=1}^2$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Entonces, si $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $v = (e_i)^t\, X$ entonces $f(v) = (E_j)^t\, Y$ donde $Y = AX$.

De forma análoga, considerando $\{v_i\}_{i=1}^3$ y $\{w_j\}_{j=1}^2$ bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente, se tiene que $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $v = (v_i)^t\, \widetilde{X}$ entonces $f(v) = (w_j)^t\, \widetilde{Y}$ donde $\widetilde{Y} = B\widetilde{X}$.

Si denotamos por R y S a las matrices de cambio de base tales que

$$(v_i)^t = (e_i)^t R, \qquad (w_j)^t = (E_j)^t S$$

se tiene que $S\,B = A\,R$ o equivalentemente $B = S^{-1}\,A\,R$. Así,

```
>> R=[1 1 1;1 0 0; 1 1 0]
R =
     1     1     1
     1     0     0
     1     1     0
>> S=[1 0;2 -1]
S =
     1     0
```

```
      2    -1
>> B=inv(S)*A*R
B =
[ 2, 1, 0]
[ 0, 0, 0]
```

Comprueba que $f(v_1) = 2w_1$, $f(v_2) = w_1$ y $f(v_3) = (0, 0)$.

```
>> fv1=subs(f,{x1,x2,x3},{1,1,1})
fv1 =
[ 2, 4]
>> % continua....
```

2 Ejercicios propuestos

1. Sea $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ definido por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 - x_1, x_2 + 2x_4).$$

   (a) Determina la ecuación coordenada de f respecto de las bases canónicas ($Y = AX$).

   (b) Halla una base de $\mathrm{Im} f$.

   (c) Halla el subespacio $\mathrm{Ker} f$.

   (d) Comprueba que $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$.

   (e) Considera

$$\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (2, 0, 0, 1)\} \quad \text{base de } \mathbb{R}^4,$$

$$\{(1, 0, 2), (-1, 1, 0), (-3, 1, 1)\} \quad \text{base de } \mathbb{R}^3.$$

   Sea B la matriz coordenada de f respecto de estas bases ($\tilde{Y} = B\tilde{X}$). Justifica que las matrices A y B son equivalentes.

   (f) Halla la matriz B.

2. Considera $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ dado por $f(0, 0, -1) = (0, 0, -2)$ y $f(s) = 3s$, $\forall s \in S$, siendo

$$S = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0 \,\}.$$

   (a) Determina A, matriz coordenada de f respecto de la base de $\mathbb{R}^3$

$$\{(0, 0, -1), (1, -1, 0), (1, 0, -1)\}.$$

   (b) Utiliza la semejanza de matrices para calcular la matriz coordenada de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

3. Sea $h \in \mathrm{End}\,(\,\mathbb{R}^4\,)$ verificando:

   - $\mathrm{Ker}\, h = \{\, (\, x, y, z, t\,) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0,\ \ t = 0 \,\}$

- Los vectores $(1,1,1,0)$ y $(0,0,0,1)$ son fijos.

(a) Construye la matriz coordenada de h respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

(b) Determina la matriz del endomorfismo respecto de la base: $B' = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$.

4. Considera $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}_1[x])$ dado por:

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2)x.$$

(a) Halla $f(1 + 2x - 5x^2)$.

(b) Determina la matriz coordenada de f respecto de las bases canónicas $\{1, x, x^2\}$ y $\{1, x\}$.

(c) Calcula bases de los subespacios $\mathrm{Im}\ f$ y $\mathrm{Ker}\ f$.

(d) Justifica la equivalencia entre las matrices A y B, siendo B la matriz coordenada de f respecto de las bases:

$$\{1 + x + x^2,\ 1 + x^2,\ 1\}, \qquad \{1 + 2x,\ -1\}.$$

5. Considera $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}_1[x])$ dado por:

$$f(ax^2 + bx + c) = (a + b)x + (2c + a).$$

(a) Halla la matriz coordenada respecto de las bases canónicas ($\{x^2, x, 1\}$, $\{x, 1\}$).

(b) Estudia si f es una aplicación inyectiva o suprayectiva.

(c) Estudia si los polinomios $p(x) = x^2 + x + 1$ y $q(x) = x^2 + 2x + 6$ pertenecen o no al subespacio

$$S = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \,/\, c = 5a + b/2\}.$$

(d) Determina $f(S)$.

6. Sean $f, h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ con ecuaciones coordenadas respecto de la base canónica $Y = AX$ e $Y = BX$, respectivamente, donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Estudia si $h \circ f$ es una aplicación biyectiva.