Diagonalización

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1 Ejemplo resuelto

A continuación se presenta un ejercicio resuelto para ilustrar cómo funcionan las "nuevas" ordenes en MATLAB que puedes necesitar para resolver los ejercicios propuestos en la práctica.

Considera $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ de ecuación coordenada respecto de la base canónica $Y = AX$ donde

```
>> A=[0 1 1;0 2 2;0 0 1]

A =

     0     1     1
     0     2     2
     0     0     1
```

El polinomio característico de h:

```
>> syms x
>> pol=det(x*eye(3)-A)
pol =
x*(x-2)*(x-1)
```

OBS: es obvio puesto que A es triangular superior. Además el endomorfismo es diagonalizable es $\mathbb{R}$ puesto que todos los valores propios son reales y distintos.

Subespacios fundamentales:

```
>> M1=(1*eye(3)-A)
M1 =
     1    -1    -1
     0    -1    -2
     0     0     0

>> V1=null(M1,'r')
V1 =
    -1
    -2
     1
```

```
>> M2=(2*eye(3)-A)
M2 =
      2            -1            -1
      0             0            -2
      0             0             1
>> V2=null(M2,'r')
V2 =
     1/2
      1
      0
>> V0=null(A,'r')
V0 =
      1
      0
      0
```

Base de vectores propios: $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(-1,-2,1),\ (1/2,1,0),\ (1,0,0)\}$.

Ejercicio: Justifica que A es semejante a la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Halla una matriz P tal que $D = P\,A\,P^{-1}$.

2 Otras órdenes en MatLab

```
>> null(A,'r') % base ``racional'' del conjunto de soluciones de  AX=0
>> diag(v) %matriz diagonal con las coordenadas v_i en la diagonal
>> eig(A) %proporciona los valores propios de A
>> [V,D]=eig(A)%las columnas de V son las coordenadas de una base ...
               %vectores propios y D es matriz diagonal con los ...
               %valores propios en la diagonal
>> % solve('ecu1','ecu2',...): Para resolver ecuaciones
>> poly(A) %halla los coeficientes del polinomio caracter\'{\i}stico de A
>> factor(p) % factorizar el polinomio p.
```

3 Ejercicios propuestos

1. Sea $h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ que respecto de la base canónica tiene por ecuación $Y = AX$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudia si es diagonalizable y, si lo es, construye una matriz regular P tal que $P^{-1}\,A\,P$ sea diagonal.

2. Sean $f, h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ con ecuaciones coordenadas respecto de la base canónica $Y = AX$ e $Y = BX$, respectivamente, donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determina los subespacios fundamentales de $h \circ f$ y estudia si es diagonalizable.

3. Comprueba que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. Halla, si existen, A^{300} y $A^{1/2}$.

4. Considera el endomorfismo $h \in \mathrm{End}\,(\mathbb{R}_2[x])$ tal que

$$h(a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2) = -a_2 + (a_0 + a_1 + a_2)\,x + (a_0 + 2a_2)\,x^2.$$

Calcula los subespacios fundamentales y, en caso de ser h un endomorfismo diagonalizable, determina una matriz Q tal que $D = Q\,A\,Q^{-1}$, con D matriz diagonal.

5. Sean $M_2(\mathbb{R})$, $\{E_1,\, E_2,\, E_3,\, E_4\}$ la base canónica y $h \in \mathrm{End}\,(M_2(\mathbb{R}))$ tal que

- $E_1,\, E_2 \in \mathrm{Ker}\,(h)$,
- el polinomio característico de h es $x^2(x-1)(x+2)$,
- $h(E_3) = -2E_1 + E_3$,
- $h(E_4) = -2E_2 - 2E_4$.

(a) Sin hacer ningún cálculo y teniendo en cuenta únicamente los datos que te dan en el enunciado, justifica que h es un endomorfismo diagonalizable.

(b) Comprueba que los vectores $A_1 = E_2 + E_4$ y $A_2 = -2E_1 + E_3$ son vectores propios de h.

(c) Da una base de vectores propios de h y calcula D, la matriz coordenada de h respecto de esa base.

(d) Si A es la matriz coordenada de h respecto de la base canónica, halla P regular tal que $A = P\,D\,P^{-1}$.

(e) ¿h es biyectivo?

(f) Halla $\mathrm{Im}\,f$.

4 Sucesión de Fibonacci

Leonardo de Pisa (1175-1250) (cuyo sobrenombre "Fibonacci" se debe al matemático francés Edouard Locus, 1842-1891) estudió el siguiente problema de crecimiento de población: "Calcular el número de conejos que resultan en un año, si se comienza con una sola pareja que cría otra al final de cada mes. Cada nueva pareja comienza a reproducirse de igual manera al cabo de un mes de nacimiento, y se supone que ningún conejo muere".

Este problema se resuelve a partir de la relación de Fibonacci

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \\ F_0 = 0, \;\; F_1 = 1 \end{array} \right. \quad (1)$$

contenida en la obra "Liber Abaci" en 1202 y que es el origen del estudio de las *Ecuaciones en Diferencias.*

Averiguar el número de parejas de conejos al cabo de 100 meses se reduciría a calcular F_{100}.

Una manera de resolver el problema sería calcular $F_2, F_3, \cdots, F_{99}$, (es decir, los sucesivos términos de la *sucesión de Fibonacci* $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$) pero vamos a evitar esos cálculos nada gratos con una técnica basada en la diagonalización de matrices.

Consideramos la ecuación en diferencias (1) expresada en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

y definimos A y $\mathbf{x}_n$, $n \geq 0$ por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}, \; n \geq 0, \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

entonces la ecuación (1) se reduce a

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n.$$

Conocemos $\mathbf{x}_0$ y queremos determinar $\mathbf{x}_{99}$. Observamos que

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0, \; \mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = A^2\mathbf{x}_0, \; \mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = A^3\mathbf{x}_0, \cdots$$

y se puede demostrar por inducción que

$$\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0$$

con lo que el problema se reduce a calcular la potencia A^{99} para hallar $\mathbf{x}_{99}$.

Ejercicio: Estudia si la matriz A es diagonalizable.

Ejercicio: Si lo es, utiliza esta característica para calcular cualquier potencia de A como producto de matrices, sin necesidad de realizar las potencias sucesivas de A.

Ejercicio: Calcula el número de pares de conejos que habrá al cabo de dos años.

Observación: Si calculamos los cocientes F_{n+1}/F_n para valores de n muy grandes, se obtienen valores que se van aproximando al número $(1+\sqrt{5})/2$ que fue llamado por los griegos *razón de oro* o *número de áureo.* El número áureo aparece en diversas áreas como la geometría. Los rectángulos más estéticos tienen sus lados en la razón 1.6 : 1 como saben todos los artistas y carpinteros.

1. En una pequeña localidad hay dos supermercados de alimentación: X e Y. Se sabe que de los clientes del supermercado X de un año, el 70% lo sigue siendo el siguiente , mientras que el 30% se pasa a la competencia. De la misma forma, el 60% de los clientes del autoservicio Y de un año vuelve a serlo el siguiente, mientras que el 40% restante cambia de establecimiento. En el año 1989 el supermercado Y recibió 1200 clientes.

   (a) Calcula cuántos clientes tuvo el supermercado X sabiendo que en el año 1990 entraron el mismo número de clientes que en el año 1989 en ambos establecimientos.

   (b) Determina cuántos clientes entraron en el año 2002.