Formas cuadráticas

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1 Ejemplo resuelto

A continuación se presenta un ejercicio resuelto para ilustrar cómo funcionan las "nuevas" órdenes en MATLAB que puedes necesitar para resolver los ejercicios propuestos en la práctica.

Sea la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2.$$

La matriz coordenada (respecto de la base canónica) es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonalizamos por congruencias la matriz A

```
>> A=[3 1;1 5];
>> A1=pijt(2,1,-1/3,2)*A*pijt(1,2,-1/3,2)
A1 =
      3           0
      0         14/3
>> P=pijt(1,2,-1/3,2)
P =
      1        -1/3
      0          1
>> D=P'*A*P
      3           0
      0         14/3
```

Luego la forma cuadrática q es definida positiva y una base A-conjugada de $\mathbb{R}^2$ es: $\{(1,0), (-1/3, 1)\}$ respecto de la cual la matriz coordenada de la forma cuadrática es la matriz diagonal D.

Vamos a representar gráficamente la forma cuadrática q e interpretaremos qué significa que sea definida positiva. Para ello, generamos un m-*file*, llamado `repre_grafica` con el siguiente contenido:

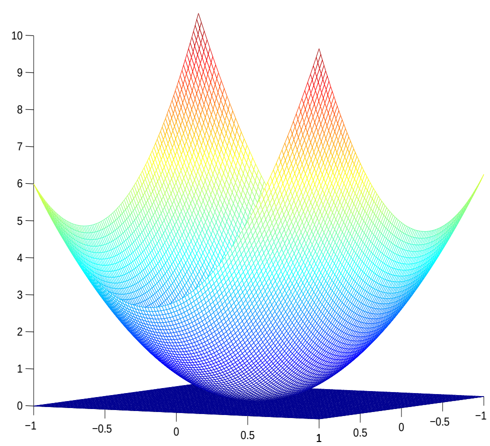
```
function repre_grafica
%generamos la malla de puntos
%en la que evaluaremos la funcion
```

```
x=-1:0.02:1;
y=x;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
%definimos la funcion
Z=3*X.^2+2*X.*Y+5*Y.^2;
%plano z=0
n=size(x,2);
Z0=zeros(n,n);
% dibujamos
hold on
mesh(x,y,Z)
mesh(x,y,Z0)
hold off
```

Nota. `X` e `Y` son matrices y cuando ponemos el "." al operar estamos realizando la operación elemento a elemento. Así, con `X.*Y` multiplicamos el elemento `X(i,j)` por el elemento `Y(i,j)`, y con `X.^2` elevamos al cuadrado cada elemento de `X`.

Si ejecutamos

```
>> repre_grafica
```



Luego efectivamente $q(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

2 Ejercicios propuestos

1. Clasifica las siguientes formas cuadráticas definidas en $\mathbb{R}^2$ a partir de su representación gráfica. En segundo lugar, halla su signatura para comprobar que lo has hecho correctamente.

   (a) $q(x_1,x_2) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$.

   (b) $q(x_1,x_2) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$.

   (c) $q(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$.

   (d) $q(x_1,x_2) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2$.

Observa que en las formas cuadráticas anteriores, el origen $(0,0)$ es un punto crítico. Indica qué tipo de punto es (máximo relativo, mínimo relativo, punto silla). (Ver sección 3).

2. Sea la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 4x_3x_4.$$

   (a) Si denotamos por A a la matriz coordenada de q respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, determina una base de vectores de $\mathbb{R}^4$ A-conjugada.

   (b) Comprueba que A es definida positiva.

   (c) Halla la factorización de Cholesky.

   (d) Utiliza la factorización anterior para resolver el sistema $Ax = b$ con $b = (4, 5, 7, 6)'$.

3. Sea la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

   (a) Diagonaliza por congruencias la forma cuadrática q.

   (b) Halla, si existe, la factorización de Cholesky.

   (c) Utiliza las factorizaciones anteriores para resolver el sistema $Ax = b$ con $b = (5, 5, 5, 5)'$.

   Nota. Recuerda que con la orden `>> B\c` MatLab proporciona la solución del sistema lineal $Bx = c$ y que para trasponer una matriz `A` basta ejecutar `>> A'`

4. Determina la factorización de Cholesky de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Extremos relativos de formas cuadráticas

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica y la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(X) = X' A X = \frac{1}{2} X' (2A) X.$$

Se tiene que $q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y además

$$\nabla q(X) = 2AX, \quad \text{(gradiente)}$$

$$H(X) = 2A, \quad \text{(hessiana)}$$

Por otra parte es inmediato observar que $X_0 = (0, \ldots, 0)'$ es un punto crítico de q, ($\nabla q(X_0) = (0, \ldots, 0)\,)'$. Luego, si

- A es definida positiva, entonces X_0 es mínimo relativo,
- A es definida negativa, entonces X_0 es máximo relativo,
- A es indefinida, entonces X_0 es punto silla.

4 Otros criterios de clasificación de formas cuadráticas

Criterio de los menores. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica y consideramos los menores

$$\triangle_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}, \qquad k = 1, \dots, n.$$

1. A es definida positiva si y sólo si $\triangle_k > 0$ para todo k.
2. A es definida negativa si y sólo si $\triangle_k > 0$ si k es par y $\triangle_k < 0$ si k es impar.
3. Si $\triangle_k \neq 0$ para todo k y no estamos en ninguna de las situaciones anteriores, entonces A es indefinida.

Observaciones.

- En 3) el recíproco no es cierto, luego este criterio nos proporciona una condición suficiente, no necesaria.
- Este criterio es muy costoso y sólo se emplea para matrices de orden bajo. Además no permite clasificar todos los casos.

Criterio de los valores propios. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios (que son todos reales). Entonces:

1. A es definida positiva si y sólo si $\lambda_i > 0$ para todo i.
2. A es definida negativa si y sólo si $\lambda_i < 0$ para todo i.
3. A es semidefinida positiva si y sólo si $\lambda_i \geq 0$ para todo i con algún $\lambda_i = 0$.
4. A es semidefinida negativa si y sólo si $\lambda_i \leq 0$ para todo i con algún $\lambda_i = 0$.
5. A indefinida si y sólo si $\lambda_i > 0$ para algún i y $\lambda_j < 0$ para algún j.