

Espacios euclídeos

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluze
Universidad de Zaragoza

1 Ejercicios propuestos

1. Halla la factorización QR de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Comprueba que el sistema

$$\begin{aligned} x + z &= 1, \\ 2x + y + z &= 1, \\ x + y &= 1, \\ x + 2z &= 2. \end{aligned}$$

es incompatible. Utiliza la factorización QR (de la matriz de coeficientes A) para encontrar la mejor aproximación de la solución del sistema.

3. Resuelve el sistema sobredeterminado

$$\begin{aligned} 3x - z + t &= 2, \\ 9y + 2z &= 15, \\ -x + 2y + z &= 2, \\ x + t &= 0, \\ 2x + 2y + t &= 0. \end{aligned}$$

4. Determina la parábola que mejor se ajusta a los puntos del plano: $(-1, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(2, 2)$.
5. Un profesor mantiene las estadísticas, que se muestran en la tabla, del porcentaje de notables otorgados durante un período de seis semestres. Aproximando por mínimos cuadrados mediante una recta, calcular el porcentaje de notables que se esperan en el décimo semestre.

Semestre	1	2	3	4	5	6
% Notables	0.20	0.25	0.20	0.35	0.45	0.40

6. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

definimos en \mathbb{R}^3 el producto escalar

$$(u, v)_A = X^t A Y,$$

siendo X e Y las coordenadas de los vectores u y v en la base canónica, respectivamente. Determina una base de \mathbb{R}^3 ortonormal respecto del producto escalar $(\cdot, \cdot)_A$.

7. Considera el espacio euclídeo $V = \mathbb{R}_2[x]$ con el producto escalar

$$(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x) dx.$$

Estudia si los polinomios $1 + x$ y x^2 son ortogonales.