Problemas de exámenes

Natalia Boal
María Luisa Sein–Echaluce
Universidad de Zaragoza

1. Demuestra si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

   (a) En $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la relación
   $$A \,\mathcal{R}\, B \;\Leftrightarrow\; A \text{ y } B \text{ son matrices semejantes}$$
   es una relación de equivalencia.

   (b) Sea V un espacio vectorial real, $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ una base de V y $h \in \mathrm{End}\,(V)$ dado por:
   $$h(a_1) = -a_1 + a_2, \quad h(a_2) = 2a_1, \quad h(a_3) = a_3, \quad h(a_4) = a_1 + a_4.$$
   Entonces $S = \mathbb{R} < \{a_1,\, a_2\} >$ es un subespacio h–invariante.

2. Sea $f \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}_1[x],\, \mathbb{R}_2[x])$ definido por $f(ax+b) = ax^2 + (a-b)x + a$.

   (a) Construye la matriz coordenada A respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathbb{R}_2[x]$.

   (b) Halla los subespacios $\mathrm{Ker}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$.

   (c) Determina $S \leq \mathbb{R}_2[x]$ tal que $\mathbb{R}_2[x] = \mathrm{Im}\,(f) \oplus S$.

3. Considera la forma bilineal simétrica $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por
   $$F((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 - x_3y_1 - x_1y_3 + 4x_2y_2 - 3x_2y_3 - 3x_3y_2.$$

   (a) Calcula el rango y la signatura de F.

   (b) Determina una base de $\mathbb{R}^3$ conjugada respecto de F.

   (c) Justifica que la matriz coordenada de F respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es congruente con la matriz B, siendo B la matriz coordenada de F respecto de la base $\{(0,1,0),\, (0,1,1),\, (-1,2,1)\}$.

   (d) ¿F es producto escalar? En aso afirmativo determina una base de $\mathbb{R}^3$ ortonormal respecto de F.

4. Se definen sobre $\mathbb{R}$ dos operaciones de la forma siguiente:
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad x \star y = x + y + 2,$$
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad x \circ y = xy.$$
   Estudia si $(\mathbb{R}, \star, \circ)$ tiene estructura de anillo.

5. Sea $f \in \text{Hom}\,(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ que hace corresponder a los vectores $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$, los vectores $(0,1)$, $(0,2)$ y $(1,1)$, respectivamente.

   (a) Construye la matriz coordenada de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

   (b) Determina $f(S)$ siendo $S = \{\,(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 = 0\,\}$.

   (c) Halla $\text{Ker}\, f$ e $\text{Im}\, f$.

6. Sea $h \in \text{End}(\mathbb{R}_1[x])$ tal que $h(3x) = -5x + 1$ y $h(x+1) = -2x - 2$.

   (a) Halla la matriz coordenada de h respecto de la base $\{p_1(x), p_2(x)\}$ donde $p_1(x) = 3x$ y $p_2(x) = 1 + x$.

   (b) Determina $\text{Ker}\, h$ e $\text{Im}\, h$.

   (c) Utilizando la semejanza de matrices, halla la matriz coordenada de h respecto de la base canónica de $\mathbb{R}_1[x]$.

   (d) Estudia si h es o no diagonalizable.

7. Sean V espacio vectorial real de dimensión 4 y $F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica cuya matriz coordenada respecto de una base $\{a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4\}$ es de la forma A=

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Partiendo del vector $v = a_2 + a_4$, construye una base de V que sea conjugada respecto de F.

   (b) Clasifica la forma cuadrática asociada a F.

8. Sean $V = \mathbb{R}_2[x]$ y $W = \mathbb{R}_1[x]$. Considera la aplicación

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + 2a_2 x.$$

   (a) Determina la matriz coordenada de f respecto de las bases canónicas que denotamos por A.

   (b) Estudia si f es suprayectiva.

   (c) Halla $\text{Ker} f$.

   (d) Considera el par de bases $\{\,1,\, (1+x),\, (1+x^2)\,\}$ y $\{\,1,\, (1+x)\,\}$ de V y W, respectivamente. Si $\widetilde{Y} = B\widetilde{X}$ representa la ecuación coordenada de f respecto de este par de bases, justifica que A y B son matrices equivalentes.

9. Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Sin hacer ningún calculo previo y teniendo en cuenta únicamente las características de la matriz A, justifica que A es diagonalizable.

(b) Halla una matriz P ortogonal tal que $D = P^t\, A\, P$ sea diagonal.

(c) ¿A es definida positiva? (Razona la respuesta).

(d) Halla, si existe, la factorización de Cholesky de A.

10. Demuestra si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones

(a) Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es *idempotente* ($A^2 = A$), entonces la matriz $B = I - A$ también es idempotente y además $AB = BA = O$.

(b) Considera $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétricas con A definida positiva y B definida negativa, entonces $A + B$ es indefinida.

11. Sean $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $S \subseteq V$ cuyos vectores son de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Prueba que S es subespacio vectorial de V.

(b) Halla una base de S.

(c) Sea el homomorfismo $f : S \longrightarrow S$ dado por

$$f\begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b+c \\ -2b+c & 0 \end{pmatrix}.$$

Determina la matriz coordenada de f respecto de la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) Halla $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

12. Sea $h \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ verificando las siguientes propiedades:

- $v_1 = (1, 0, 1)$ y $v_2 = (1, -1, 0)$ vectores propios asociados al valor propio λ,
- $\operatorname{Ker} h = \{\, (x, y, z) \,/\, x + 2z = 0,\ y = 0\,\}$,
- $h(0, 1, 0) = (-2, 3, 1)$.

Se pide:

(a) Halla el valor propio λ.

(b) Prueba que h es diagonalizable y determina una base respecto de la cual la matriz coordenada de h es diagonal, que denotamos por D.

(c) Si $Y = AX$ representa la ecuación coordenada de h respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Demuestra que A y D son matrices semejantes y halla P regular tal que $A = PDP^{-1}$.

(d) Demuestra que $\mathbb{R}^3 = V(\lambda) \oplus \mathrm{Ker} h$.

13. Sea $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y consideramos el subespacio de las matrices simétricas, esto es,

$$S_1 = \{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, A = A' \}.$$

(a) Halla una base de S_1.

(b) Sea $S_2 = \mathbb{R}\langle A_1, A_2 \rangle$ donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estudia si S_1 y S_2 son suplementarios respecto de V.

(c) Halla un subespacio S_3 tal que $V = S_1 \oplus S_3$.

14. Considera el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Halla la factorización QR de A.

(b) Comprueba que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es incompatible y determina su solución por mínimos cuadrados.

15. Sea $h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ de ecuación $Y = AX$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $\{e_i\}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Prueba que h es diagonalizable.

(b) Determina $P \in \mathcal{M}(3)$ regular tal que $D = P^{-1}AP$ sea diagonal.

(c) En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar ordinario. Partiendo de una base de vectores propios, construye una base $\{u_i\}$ de vectores de $\mathbb{R}^3$ que sea ortonormal respecto del producto escalar ordinario.

(d) Si se denota por Q a la matriz de cambio de base de $\{e_i\}$ a $\{u_i\}$, comprueba que Q es ortogonal.

(e) Si consideramos la forma bilineal simétrica $F(u,v) = X^tAY$, respecto de la base canónica, ¿podemos afirmar que F es un producto escalar definido en $\mathbb{R}^3$?

16. Sea V un espacio vectorial real y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 3 \end{pmatrix}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Dependiendo de los valores de λ, clasifica la forma cuadrática que tiene a esta matriz A como matriz coordenada respecto de una base dada $\{a_i\}$.

(b) Para el valor $\lambda = 1$, halla el complemento ortogonal de V.

17. En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ consideramos la base

$$\{A_i\}_{i=1}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y h endomorfismo tal que $h(A_1) = A_1,\ h(A_2) = A_2,\ h(A_3) = 2\,A_3,\ h(A_4) = 4\,A_4$.

(a) Halla el polinomio característico y razona si h es o no diagonalizable.

(b) Halla Imh. ¿h es isomorfismo? (Razona la respuesta).

(c) Si $Y = AX$ es la ecuación coordenada de h respecto de la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y si $\widetilde{Y} = B\widetilde{X}$ es la ecuación coordenada respecto de $\{A_i\}_{i=1}^4$. Demuestra que A y B son matrices semejantes. Halla P regular tal que $A = PBP^{-1}$ (**no calcules** A).

(d) Discute la existencia y unicidad de solución del sistema homogéneo $AX = \mathbf{0}$, donde A es la matriz dada en el apartado anterior.

18. Sean $V = \mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos y coeficientes reales y la aplicación $\langle\,,\,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}\,x.$$

Calcula la distancia entre los polinomios $p(x) = 1 + x + x^2$ y $q(x) = -x + x^2$, esto es, $\|p - q\|$.

19. Halla las descomposiciones que se piden de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 8 \\ 0 & 8 & 17 \end{pmatrix}.$$

(a) $D = P\,A\,P^t$ con P regular y triangular inferior y D diagonal con $d_{ii} > 0$ para todo i.

(b) A partir de la factorización anterior, halla Q regular y triangular inferior con $q_{ii} > 0$ para todo i tal que $I = Q\,A\,Q^t$.

(c) Justifica que la matriz anterior admite factorización LU. Halla dicha descomposición.

(d) Utiliza una (la que quieras) de las factorizaciones de los apartados anteriores para determina la factorización de Cholesky de A.

20. Considera $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y los subespacios

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \, c = b \right\}, \qquad T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \, a = d = 0, \, c = -b \right\}.$$

(a) Halla una base de cada uno de estos subespacios.

(b) Calcula $S \cap T$, $S + T$ y estudia si se cumple que $V = S \oplus T$.

(c) Halla una base de V que contenga a las bases determinadas en el apartado (a).

(d) Comprueba que $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ es base de V con

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Calcula las coordenadas respecto de la base B de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

21. Demuestra si es cierta o falsa la siguiente afirmación:

Sean S_1, S_2, y S_3 tres subespacios de V (espacio vectorial real) tales que $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{0_V\}$, entonces $S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$.

22. Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Halla una matriz P ortogonal tal que $D = P^t \, A \, P$ sea diagonal.

(b) Determina el rango y la signatura de A.

(c) Halla, si existe, la factorización de LU de A. Indica cómo calcularías a partir de ésta la factorización de Cholesky de A.

23. Considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y los subespacios

$$S_1 = \{(x, y, z)/x = 0\}, \quad S_2 = \{(x, y, z)/y = 0\}, \quad S_3 = \{(x, y, z)/y = z = 0\}.$$

Razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones.

(a) $S_1 \oplus S_2$.

(b) $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_3$.

(c) $S_2 + S_3 = S_2 \cup S_3$.

24. Sean V y W dos espacios vectoriales reales y $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $\{w_1, w_2, w_3\}$ bases de V y de W, respectivamente. Considera la aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ dada por

$$f(v_1) = w_1 - w_3 \quad f(v_2) = w_2 + w_3, \quad f(v_3) = w_3, \quad f(v_4) = 0_W.$$

(a) Halla la matriz coordenada de f respecto de las bases anteriormente dadas.

(b) Determina los subespacios $\mathrm{Ker} f$ e $\mathrm{Im} f$.

(c) Considera las bases $\{\widetilde{v}_i\}$ y $\{\widetilde{w}_j\}$ con $\widetilde{v}_1 = v_1$, $\widetilde{v}_2 = v_1 + v_2$, $\widetilde{v}_3 = v_1 + v_2 + v_3$, $\widetilde{v}_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ y $\widetilde{w}_1 = w_1$, $\widetilde{w}_2 = w_1 + w_2$ y $\widetilde{w}_3 = w_1 + w_2 + w_3$. Si B es la matriz coordenada asociada al par de bases $\{\widetilde{v}_i\}$ y $\{\widetilde{w}_j\}$, halla matrices P y Q tales que $B = PAQ$.

25. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos y coeficientes reales. Para todo $p, q \in V$ se define la aplicación $\langle \, , \, \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ donde

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

(a) Comprueba que la aplicación anterior es un producto escalar.

(b) Define la norma asociada a este producto escalar.

(c) Calcula la distancia entre los polinomios $p(x) = 1 + x + 2x^2$ y $q(x) = -x + x^2$, esto es, $\|p - q\|$.

26. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donde

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 + a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 + a_2 \end{pmatrix}$$

(a) Halla los subespacios $\mathrm{Ker}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$.

(b) Considera el subespacio $S = \{\, p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \,/\, p(0) = p(1) \,\}$. Estudia si $\mathbb{R}_2[x] = S \oplus \mathrm{Ker}\, f$.

(c) Determina la matriz coordenada de f respecto de las bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\{x + 1,\, x^2 - 1,\, x^2 - x + 1\}$ y $\{A_i\}_{i=1}^4$ con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

27. Considera $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar $X'AY$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) A partir de la base canónica construye una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

(b) Halla la proyección ortogonal de $v = (-1, 2, -1)$ en

$$S = \{ (x, y, z) \,/\, x + y + z = 0 \}.$$

(c) ¿La matriz A admite factorización de Cholesky? En caso afirmativo indica cómo la construirías (no la calcules).

28. Considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(1, 1) = (3, 1, 1), \qquad f(1, -1) = (1, 1, -1).$$

(a) Halla A la matriz coordenada de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

(b) Estudia si f es o no inyectiva.

(c) Determina un subespacio suplementario de $\mathrm{Im} f$.

(d) Halla B la matriz coordenada de f respecto de $\{(1, 1),\ (2, -2)\}$ y $\{(0, 1, -1),\ (3, 1, 1),\ (1, 1, -1$ (bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente). Prueba que A y B son matrices equivalentes.

29. Sea $V = \mathbb{R}_1[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que uno y coeficientes reales. Se define la aplicación $\langle \cdot\, , \cdot \rangle : \mathbb{R}_1[x] \times \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$ con

$$\langle (ax + b), (a'x + b') \rangle = aa' + 2bb' + ab' + a'b.$$

(a) Comprueba que la aplicación anterior es un producto escalar.

(b) Define la norma asociada a este producto escalar.

(c) Calcula la norma de los polinomios 1 y x.

(d) Denotamos por A a la matriz coordenada asociada a la base canónica de $\mathbb{R}_1[x]$. Halla A. ¿La matriz A admite factorización de Cholesky? Razona tu respuesta.

30. Demuestra si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones

(a) Sean V un espacio vectorial real y S, T, y U tres subespacios de V tales que

$$\text{Base de } S: \ \{v_1\}, \qquad \text{Base de } T: \ \{v_2, v_3\}, \qquad \text{Base de } U: \ \{v_4, v_5\}.$$

Si $S \oplus T \oplus U$ entonces $S \cap T \cap U = \{0_V\}$.

(b) Sean V un espacio euclídeo y $\mathcal{A} = \{ v_1, v_2, \ldots, v_m \}$ una familia de vectores no nulos. Si la familia $\mathcal{A}$ es ortogonal entonces también es libre.

31. Sea $h : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ una aplicación lineal de ecuación coordenada respecto de la base canónica $\{1,\ x,\ x^2\}$, $Y = AX$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1/2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Considera el subespacio $S = \{\, p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,/\, p(0) = p(1)\,\}$. Halla $h(S)$.

(b) Estudia si h es diagonalizable.

(c) Halla $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

32. Considera la forma bilineal simétrica $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = -2x_1y_1 + 4x_2y_1 + 4x_1y_2 - 7x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 6x_3y_3.$$

(a) Calcula el rango y la signatura de F.

(b) Determina una base de $\mathbb{R}^3$ conjugada respecto de F.

(c) Razona si F define o no un producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

33. Sean V y W dos espacios vectoriales reales y $f : V \to W$ aplicación lineal. Demuestra si las siguientes afirmaciones son falsas o ciertas.

(a) $\operatorname{Im} f$ es un subespacio vectorial de W.

(b) Si $\{v_1, \ldots, , v_n\}$ es una base de V entonces $\{f(v_1), \ldots, , f(v_n)\}$ es un sistema generador de W.

(c) Si $\{v_1, \ldots, , v_n\}$ es una base de V entonces $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ es una base de $\operatorname{Im} f$.

34. Considera $V = \mathbb{R}_3[x]$ y los subespacios

$$S = \{\, a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 \,/\, a_1 = a_2\,\},$$
$$T = \{\, a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 \,/\, a_1 = -a_2,\ a_0 = a_3 = 0\,\}.$$

(a) Halla una base de cada uno de estos subespacios.

(b) Calcula $S \cap T$ y estudia si se cumple que $V = S \oplus T$.

(c) Comprueba que $B = \{\, p_1(x),\, p_2(x),\, p_3(x),\, p_4(x)\,\}$ es base de V con

$$p_1(x) = 1 + x + x^3,\ p_2(x) = -1 + 2x,\ p_3(x) = x,\ p_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3.$$

(d) Calcula las coordenadas respecto de la base B del polinomio

$$p(x) = 2 + 2x + x^2 + 2x^3.$$

35. Considera la forma bilineal simétrica $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 5x_3y_3.$$

(a) Halla A, la matriz coordenada de F respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determina una base de $\mathbb{R}^3$ conjugada respecto de F y calcula el rango y la signatura de F.

(c) Razona si la matriz A admite o no factorización de Cholesky y en caso afirmativo calcula dicha factorización.

36. Considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ donde

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3,\, x_2,\, x_2,\, x_1 + x_3)$$

(a) Halla los subespacios $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

(b) Determina A la matriz coordenada de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

(c) Halla B la matriz coordenada de f respecto de la base de $\mathbb{R}^4$

$$\{v_i\}_{i=1}^n = \{(1,0,0,1),\, (0,1,1,0),\, (-1,0,1,0),\, (0,0,0,1)\}.$$

(d) Justifica la existencia de matrices regulares $P, Q \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tal que $B = PAQ$.

37. En el espacio vectorial $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ consideramos los subespacios

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \, 2a = b \right\}, \qquad T = \mathbb{R}\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

(a) Prueba que S es subespacio vectorial de V.

(b) Halla una base de S.

(c) Estudia si se cumple que $V = S \oplus T$.

(d) Comprueba que la familia $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ es base de V con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Calcula las coordenadas (respecto de la base $\mathcal{A}$) de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

38. Dada la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida mediante

$$Q(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 - 2x_1x_3 + 2\alpha\, x_2x_3.$$

(a) Da su expresión matricial respecto de la base canónica.

(b) Determina los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la forma cuadrática Q no tiene rango máximo.

(c) Para los valores de α determinados en el apartado anterior, halla el rango y la signatura de Q.

39. Considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$ dada por

$$f(2 + x) = 1 + 2x, \quad f(1 - x) = 2 + x, \quad f(1 - x - x^2) = 1 - x.$$

(a) Calcula B la matriz coordenada de f respecto de $\{\, (2+x),\, (1-x),\, (1-x-x^2)\, \}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\{\, (1+2x),\, (2+x)\, \}$ base de $\mathbb{R}_1[x]$.

(b) Determina A la matriz coordenada de f respecto del par de bases: $\{1, x, x^2\}$, base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$, y $\{1, x\}$, base canónica de $\mathbb{R}_1[x]$.

(c) Justifica que las matrices A y B son equivalentes.

(d) Halla el $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$. Estudia si la aplicación f es o no biyectiva.

40. En $\mathbb{R}^3$ se considera el subespacio

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \,/\, x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

(a) Halla $T \leq V$, un subespacio suplementario de S respecto de $\mathbb{R}^3$.

(b) Teniendo en cuenta que $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$, descompón el vector $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$ como suma de un vector de S y otro de T.

41. Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Halla una matriz P ortogonal tal que $D = P^t \, A \, P$ sea diagonal.

(b) ¿A es definida positiva? (Razona la respuesta).

(c) Halla, si existe, la factorización de Cholesky de A.

42. Considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ dada por

$$f(1 + x) = 3 + x + x^2, \qquad f(1 - x) = 1 + x - x^2.$$

(a) Halla A la matriz coordenada de f respecto de $\{1, x\}$ y $\{1, x, x^2\}$ (bases de $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathbb{R}_2[x]$, respectivamente).

(b) Estudia si f es o no inyectiva.

(c) Determina un subespacio suplementario de $\operatorname{Im} f$.

(d) Halla B la matriz coordenada de f respecto de las bases $\{1 + x,\ 2 - 2x\}$ y $\{x - x^2,\ 3 + x + x^2,\ 1 + x - x^2\}$ (de $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathbb{R}_2[x]$, respectivamente). Prueba que A y B son matrices equivalentes.

43. Dada la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$ definida por

$$q(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + \alpha {x_2}^2 + \alpha {x_3}^2 + 2x_2x_3,$$

determina $\alpha \in \mathbb{R}$ para que q sea semidefinida, indicando si es positiva o negativa.

44. Considera $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y los subespacios

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \, d = 0,\ c = b \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \, a = 0 \right\},$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \, a = d = 0,\ c = -b \right\}.$$

(a) Calcula los subespacios $S_1 \cap S_2$ y $S_2 + S_3$.

(b) Estudia si se cumple que $V = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$.

(c) Halla las coordenadas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

respecto de la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

45. Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Prueba que entre los valores propios de la matriz A están el 6 y el 9.

(b) Halla una matriz P ortogonal tal que $D = P^t \, A \, P$ sea diagonal.

(c) Determina el rango y la signatura de A.

(d) Discute la existencia y/o unicidad de solución del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (con $\mathbf{b}$ cualquiera). Justifica por qué la matriz A admite factorización LU e indica cómo utilizarías esta factorización para resolver el sistema anterior.

46. Sobre $\mathbb{R}^3$ se define la forma cuadrática q mediante

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_3 + 5x_2x_3$$

(a) Clasifica la forma cuadrática según su signatura.

(b) Razona si es posible hallar una base de $\mathbb{R}^3$ de forma que la matriz asociada con q respecto de dicha base sea

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En caso afirmativo calcula la base.

47. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ dada por

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) + (2a_0 - a_2)x.$$

(a) Determina la matriz coordenada de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}_1[x]$, respectivamente.

(b) Halla los subespacios Ker$f$ e Imf.

(c) ¿Existen matrices regulares $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tales que $B = PAQ$ con

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

Justifica la respuesta y en caso afirmativo halla las matrices P y Q.

48. Dados $w \in \mathbb{R}^3$ no nulo y $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ simétrica y definida positiva, consideramos el conjunto $U = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid w^t A u = 0\}$.

(a) Demuestra que U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) Prueba que $\mathbb{R}^3 = U \oplus \mathbb{R}\langle w\rangle$.

(c) Consideramos ahora $w = (1, -1, 0)^t$ y

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso particular, determina una base de U.

(d) Dados $v = (0, 0, 2)^t$, A y w (definidos en el apartado anterior), halla $u \in U$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v = u + \alpha w$.

49. Determina los valores propios de $h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ sabiendo que:

- $(0,1,-2), (1,0,4)$ y $(1,0,-2)$ son vectores propios,
- $h(0,1,0) = (2,1,2)$.

50. Sea el espacio vectorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y los conjuntos

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \, 2a + b + c - d = 0, \; a - b - c = 0 \right\},$$

$$T = \mathbb{R}\rangle \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}\rangle.$$

(a) Demuestra que S es subespacio vectorial.

(b) Halla una base de S y otra de T.

(c) Calcula las ecuaciones que definen T.

(d) Halla $S + T$.

(e) Estudia si $S + T$ es suma directa.

(f) Halla un subespacio suplementario de S respecto de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

51. Sean las aplicaciones lineales

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x], \quad f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ax^2 + (b - 2c)x + d$$

$$g : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(ax^2 + bx + c) = (a, b + c, -c).$$

(a) Da una base para cada uno de los subespacios siguientes: $\operatorname{Ker} f$,$\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} g$, $\operatorname{Im} g$.

(b) Estudia si f y g son inyectivas y/o suprayectivas.

(c) Dado el subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, S formado por las matrices simétricas, estudia si $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus S$.

(d) ¿Existe alguna aplicación lineal $h : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que sea biyectiva?. En caso afirmativo, da un ejemplo.

(e) Halla la matriz coordenada de $g \circ f$ respecto de las bases canónicas de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^3$.

52. Sea $f : V \longrightarrow W$ aplicación lineal entre dos espacios vectoriales tal que

$$f(a_1 + 2a_2) = b_1 + b_3, \; f(a_2) = 2b_1 + b_2.$$

donde $\{a_1, a_2\}$ y $\{b_1, b_2, b_3\}$ son bases de V y W respectivamente.

(a) Halla la matriz coordenada A de la aplicación lineal respecto de las bases $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$.

(b) Halla la matriz coordenada B de la aplicación lineal respecto de las bases $\{\alpha_i\} = \{a_1 + a_2, a_1 - a_2\}$ de V y $\{\beta_i\} = \{b_1 + b_3, b_1 - b_2, b_2\}$ de W.

(c) Demuestra que las matrices A y B son equivalentes entre sí.

(d) Halla la imagen respecto de $\{b_i\}$ de un vector cuyas coordenadas respecto de $\{\alpha_i\}$ son $(2, 3)$.

(e) Halla núcleo e imagen de la aplicación f. ¿Es biyectiva?

53. Sean $\{a_1, a_2, a_3\}$ y $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ las bases canónicas de W y V, respectivamente. Se define la aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ tal que:

$$\begin{array}{l} f(b_1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \\ f(b_1 + b_2) = a_2 + a_3 \\ f(b_1 + b_2 + b_3) = 2a_1 + a_3 \\ f(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = 2a_1 + a_2 - a_3 \end{array}$$

(a) Halla la matriz asociada a f respecto de las bases $\{b_i\}$ y $\{a_j\}$.

(b) Determina los subespacios $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$. ¿Es f inyectiva? y ¿suprayectiva?

(c) Razona cómo habría que elegir dos bases de V y W de modo que la ecuación de f respecto de dichas bases sea $Y = CX$ con

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

54. Sea la aplicación lineal

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x], \quad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a-d)x^2 + (b-c)x + (c-d).$$

(a) Da una base para cada uno de los subespacios siguientes: $\operatorname{Ker} f$,$\operatorname{Im} f$.

(b) Razona si f es inyectiva y/o suprayectiva.

(c) Dado el subespacio S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices simétricas, estudia si

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\operatorname{Ker} f \oplus S.$$

(d) Halla la matriz coordenada de f respecto de

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\{x, -1+x, 1+x^2\}$$

bases de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y de $\mathbb{R}_2[x]$, respectivamente.

(e) ¿Existe alguna aplicación lineal $h : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que sea biyectiva?. Razona la respuesta y en caso afirmativo, da un ejemplo.

55. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que $f(ax^2 + bx + c) = (b+c)x^2 + (b-c)x$.

    (a) Halla la ecuación coordenada $Y = AX$ de f respecto de la base $\{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

    (b) Da bases respectivas para $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$.

    (c) Estudia si f es biyectiva.

56. Se define una aplicación lineal $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forma:

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 - a_2 - a_3 & 2a_0 + 2a_1 + a_3 \\ 2a_1 - a_3 & a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix}.$$

    (a) Ecuación coordenada $Y = AX$ respecto de la base $\{x^3, x^2, x, 1\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ y la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

    (b) ¿Es f isomorfismo?

    (c) Halla subespacios suplementarios de $\operatorname{Ker} f$ y $\operatorname{Im} f$.

57. Sean $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el espacio real de las matrices cuadradas de orden 2, $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $h \in \operatorname{End}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ tal que

    - el polinomio característico de h es $x^2(x^2-1)$,
    - $E_2, E_3 \in \operatorname{Ker}(h)$,
    - $h(E_1) = E_4$,
    - $h(E_4) = E_1$.

    (a) Sin hacer ningún cálculo y teniendo en cuenta únicamente los datos que te dan en el enunciado, justifica que h es un endomorfismo diagonalizable.

(b) Estudia si los vectores $W_1 = E_1 + E_4$, $W_2 = E_1 + E_3$ y $W_3 = E_1 - E_4$ son vectores propios de h y, en caso afirmativo, indica cuál es el valor propio asociado.

(c) Da una base de vectores propios de h en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y calcula la matriz coordenada de h respecto de esa base, que denotamos por D.

(d) Si A es la matriz coordenada de h respecto de la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halla P regular tal que $A = P\,D\,P^{-1}$.

(e) ¿h es biyectivo?

58. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Halla:

(a) el rango y signatura de A,

(b) una matriz $P \in \mathcal{M}_3$ regular tal que P^tAP sea diagonal reducida,

(c) una base conjugada de $\mathbb{R}^3$ respecto de $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal simétrica que tiene A como matriz coordenada respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$,

(d) los valores propios de A^{-1}, en caso de que esta matriz exista.

(e) ¿existe una base ortonormal respecto de F?. Hállala en caso afirmativo y en caso negativo justifica la respuesta.

59. Sea $h \in End(V)$ y $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ una base del espacio vectorial V. Se tiene:

- $a_1, a_2 \in \operatorname{Ker}(h - 1_{\operatorname{End}(V)})$,
- $h(a_3) = -2a_1 + 3a_3$,
- $a_4 \in \operatorname{Ker} h$.

(a) Demuestra que $v = a_1 - a_3$ es vector propio e indica el valor propio asociado.

(b) Razona que h es diagonalizable.

(c) Da una base de vectores propios y la matriz coordenada respecto de esa base.

(d) Demuestra que toda matriz coordenada de h no es regular.

60. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Halla, **si existe**:

(a) una R regular tal que RAR^{-1} es diagonal,

(b) una S regular tal que SAS^t es diagonal,

(c) una base ortonormal respecto de F forma bilineal simétrica definida sobre $\mathbb{R}^3$ que tiene A como matriz coordenada respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$,

(d) una expresión para la inversa de la matriz A, en función de A, sin hacer operaciones elementales y sin aplicar la fórmula de los adjuntos.

61. Sea F la forma bilineal $F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = -x_1y_1 - 3x_2y_2 - 4x_3y_3 + x_4y_4 + \sqrt{3}x_1y_2 + \sqrt{3}x_2y_1.$$

(a) Estudia si F es simétrica.

(b) Halla la matriz coordenada de la forma cuadrática Q asociada a F respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

(c) Halla el rango y la signatura de la forma cuadrática Q asociada a F.

(d) ¿Es F un producto escalar?

(e) Halla una matriz P ortogonal tal que P^tAP sea diagonal.

62. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -3 & 6 & -6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Halla:

(a) el rango y signatura de A,

(b) una matriz $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ regular tal que P^tAP sea diagonal reducida,

(c) una base conjugada de $\mathbb{R}^3$ respecto de $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal simétrica que tiene A como matriz coordenada respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$,

(d) si existe, una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto de F,

(e) los valores propios de A,

(f) los valores propios de A^{-1}, en caso de que esta matriz exista.

63. Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Estudia si B es definida positiva

(b) ¿Existe B^{-1}?

(c) ¿Es B diagonalizable?

(d) Halla una matriz Q regular tal que $Q^tB.Q$ sea diagonal reducida

64. Sea F la forma bilineal $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(A, B) = ae + 2bf + 3cg + 4dh$$

siendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

(a) Estudia si F es una forma bilineal simétrica.

(b) Da la matriz coordenada de la forma cuadrática Q asociada a F respecto de la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Calcula el rango y la signatura de la forma cuadrática Q asociada a F.

(d) Halla una base ortogonal de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ respecto de F.

(e) ¿Existe una base ortonormal respecto de F? Hállala en caso afirmativo y en caso negativo justifica la respuesta.

65. En $\mathbb{R}^3$ se considera una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y un vector v cuyas coordenadas respecto de B son: $1, -1, 2$.

(a) Demuestra que la familia $A = \{v_1 + v_2,\ v_1 + v_2 + v_3\}$ es linealmente independiente.

(b) Completa la familia A hasta obtener una base de $\mathbb{R}^3$, B', tal que las coordenadas del vector v respecto de B' sean $1, 1, 1$.

66. Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Halla, si existe, una matriz P regular tal que $D = P^{-1}\, A\, P$ sea diagonal.

(b) Calcula, si existe, una matriz Q regular tal que $D = Q^t\, A\, Q$ sea diagonal reducida.

(c) ¿A es definida positiva?.

(d) Halla, si existe, una base ortogonal respecto de la forma bilineal que tiene A como matriz coordenada respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(e) Determina, si existe, una base ortonormal respecto de la forma bilineal que tiene A como matriz coordenada respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(f) Construye, si existe, la factorización LU de A.