Problemas de Espacios Euclídeos

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1. Considera el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$ sobre el que se definen las formas bilineales:

   i) $F(\,(\,x_1, x_2, x_3\,), (\,y_1, y_2, y_3\,)\,) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) + (2x_1 - x_3)(2y_1 - y_3).$

   ii) $F(\,(\,x_1, x_2, x_3\,), (\,y_1, y_2, y_3\,)\,) = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (3x_2 + x_3)(3y_2 + y_3) + (x_1 - 2x_3)(y_1 - 2y_3).$

   Para cada una de estas formas bilineales se pide:

   (a) Comprueba que $(\mathbb{R}^3, F)$ es un espacio vectorial euclídeo.

   (b) Construye la matriz coordenada de F respecto de la base canónica.

   (c) Calcula la norma (asociada a F) del vector $v = (1, 1, 1)$.

   (d) Halla $\mathbb{R}\langle v\rangle^{\perp}$.

2. Considera el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^2$ y la la forma bilineal $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \;=\; 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

   (a) Comprueba que F es un producto escalar.

   (b) Dado el vector $u = (1, -1)$, halla $v \in \mathbb{R}^2$ ortogonal a u respecto del producto escalar definido por F.

   (c) Calcula una base de $\mathbb{R}^2$ ortonormal respecto de F.

3. Sea $V = \mathbb{R}_1[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que uno y coeficientes reales. Se define la aplicación $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : \mathbb{R}_1[x] \times \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$ con

$$\langle (ax + b), (a'x + b')\rangle = 2aa' + 2bb' + ab' + a'b.$$

   (a) Comprueba que la aplicación anterior es un producto escalar.

   (b) Define la norma asociada a este producto escalar.

   (c) Calcula la norma de los polinomios 1 y x.

   (d) Considera este producto escalar y halla un polinomio $p(x) = ax + b$ unitario y ortogonal al polinomio $2x + 1$.

4. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos y coeficientes reales. Para todo $p, q \in V$ se define la aplicación $\langle\, ,\, \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ donde

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}\, x.$$

   (a) Demuestra que la aplicación anterior es un producto escalar.
   (b) Define la norma asociada a este producto escalar.
   (c) Calcula la distancia entre los polinomios $p(x) = 2-x+3x^2$ y $q(x) = 1-x+2x^2$, esto es, $\|p-q\|$.

5. Considerando $\mathbb{R}^4$ como espacio vectorial euclídeo con el producto escalar ordinario, aplica el método de Gram–Schmidt para hallar sistemas ortonormales a las familias de vectores:

   (a) $\{\, (1,2,1,2),\ (0,1,1,1),\ (1,0,2,2),\ (1,0,2,0)\, \}$.
   (b) $\{\, (-1,0,1,1),\ (1,2,1,0),\ (0,0,1,-1),\ (0,0,1,0)\, \}$.

6. Se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar dado por

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = 2x_1y_1 + (x_2-x_3)(y_2-y_3) + (x_1-x_3)(y_1-y_3).$$

   (a) Halla la matriz A tal que $\langle X, Y\rangle = X^tAY$.
   (b) Partiendo de la base de $\mathbb{R}^3$ $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$, construye una base de $\mathbb{R}^3$ ortonormal respecto del producto escalar anterior.

7. Considera en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = (x_1-x_2)(y_1-y_2) + x_2y_2 + (x_2+x_3)(y_2+y_3).$$

   A partir de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, aplica el método de Gram–Schmidt para encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ que sea ortonormal respecto producto escalar dado.

8. Considera $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar estándar. Halla $S^\perp$ donde

$$S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1+x_2-x_3 = 0,\ x_1-x_2+x_3 = 0\}.$$

9. Determina las matrices $Q \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $Q^tQ = I_2$ y $R \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ triangular superior verificando $A = QR$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Utiliza la factorización anterior para determinar la solución por mínimos cuadrados del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = (1,-2,0,0)^t$.

10. Determina la factorización QR de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

11. Considera $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar estándar y el subespacio

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 = 0\}.$$

Determina v_1, v_2 vectores de S que mejor aproximan a los vectores e_1 y $(e_1+e_2+e_3)$.

12. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos y coeficientes reales en el que se considera el producto escalar

$$\langle (a_0 + a_1 x + a_2 x^2), (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Determina el polinomio más próximo a $p(x) = x - 3$ perteneciente al subespacio

$$S = \mathbb{R}\langle\, (2x+1),\, x^2 \,\rangle.$$

13. Determina una matriz ortogonal P tal que PAP^t sea diagonal con

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

14. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & - & z & + & 3t & = & 0 \\ & & 9y & + & 2z & & & = & 15 \\ & + & 2y & + & z & & -t & = & 2 \\ 2x & & & & & + & 4t & = & 0 \\ x & + & 2y & & & + & t & = & 2 \end{array}$$

15. Determina la parábola $y = c + bx + ax^2$ que mejor se ajusta a los siguientes puntos del plano: $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,2)$.

16. Durante los últimos seis semestres, un profesor de álgebra ha obtenido los siguientes porcentajes de notables:

Semestre:	1	2	3	4	5	6
Porcentaje de notables:	0.20	0.25	0.20	0.35	0.45	0.40

Aproximando por mínimos cuadrados mediante una recta, calcula el porcentaje de notables previsible en el décimo semestre.