Problemas de Formas bilineales

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1. Comprueba si las siguientes aplicaciones son bilineales:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f\,(\,(\,x_1, x_2\,), (\,y_1, y_2\,)\,) = x_2y_1 + x_1y_2$.

   (b) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3y_1 + x_2$.

   (c) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_2$.

   (d) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 5x_1y_1 + 4x_1y_2 + x_2y_1 + 5x_3y_1$.

2. Considera la forma bilineal simétrica $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de matriz coordenada respecto de la base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Calcula B, matriz coordenada de f respecto de la base $\{\, v_1, v_2, v_3 \,\}$ con $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 + e_2$, $v_3 = e_1$ de dos formas:

   i) Construyendo la matriz coordenada a partir de la definición.

   iI) Justificando la congruencia entre las matrices A y B mediante un cambio de base.

3. Dada la forma bilineal simétrica $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{array}{lll} f\,(\,e_1, 3\,e_2\,) = 3, & f\,(\,2e_1, e_3\,) = 4, & f\,(\,3\,e_2,\, e_3) = -\,3, \\ f\,(\,e_1, e_1\,) = 0, & f\,(\,e_3, e_3\,) = 0, & f\,(\,2e_2, 2e_2) = -\,4. \end{array}$$

   (a) Halla la expresión coordenada de f respecto de la base canónica.

   (b) Calcula la expresión coordenada de f respecto de la base

$$\{\, v_1,\, v_2,\, v_3 \,\} \;=\; \{\, (e_3 + e_2),\, (e_1 + e_3),\, (e_2 + e_1)\,\}.$$

4. Dada la forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(\,(\,x_1, x_2, x_3\,)\,,\,(\,y_1, y_2, y_3\,)\,) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_2 + 2x_3y_3 + 2x_2y_3$$

   (a) Determina la expresión matricial de f respecto de la base canónica.

(b) Calcula el rango de f.

(c) Halla la expresión matricial de f en el sistema coordenado definido por las siguientes ecuaciones de cambio

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + 2x_3, \\ x_2' &= -2x_2 - x_3, \\ x_3' &= -x_1 - x_3. \end{aligned}$$

5. Sean $V = \mathbb{R}_2[\,x\,]$ y $F : V \times V \;\rightarrow\; \mathbb{R}$ definida por

$$F\,(\,p, q\,) = p(0)\,q(0) + p(1)\,q(1).$$

(a) Prueba que F es bilineal simétrica.

(b) Clasifica la forma cuadrática asociada: $\;q : V \;\rightarrow\; \mathbb{R}$ tal que $q(\,p\,) = F(\,p, p\,)$.

(c) Halla una base de V conjugada respecto de F.

6. En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_3[x]$ definimos la aplicación $F : V \times V \;\longrightarrow\; \mathbb{R}$ mediante:

$$F(p, q) = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx\,,\; \forall (p, q) \in V \times V.$$

(a) Prueba que F es una forma bilineal.

(b) Halla la matriz coordenada de F respecto de la base canónica $\{\,1, x, x^2, x^3\,\}$.

(c) Estudia si la forma cuadrática asocida es definida positiva.

7. Considera la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R},$ definida mediante

$$q(x_1, x_2, x_3, x4) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + -2x_1x_2 + \alpha x_3x_4 + 2{x_4}^2.$$

Determina el valor del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ para que la forma cuadrática q no sea degenerada.

8. Determina una base conjugada para la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$ dada por:

$$q(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + 2{x_2}^2 + 2{x_3}^2 + +4x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

9. Diagonaliza las siguientes formas cuadráticas definidas de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$:

(a) $q(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 - 2{x_2}^2 + {x_3}^2 + +2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$

(b) $q(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + 5{x_2}^2 + 2{x_3}^2 + -x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

(c) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$

10. Considera la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de expresión coordenada respecto de la base canónica $q((x_1, x_2, x_3)) = X^tAX$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determina una matriz regular $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que P^tAP sea una matriz diagonal.

(b) Calcula el rango y la signatura de q.

11. Considera la forma cuadrática $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$ definida por

$$q(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + 2{x_2}^2 + \alpha {x_3}^2 + 2x_2x_3 + 4x_1x_3.$$

Clasifica la forma cuadrática q en función parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

12. Para cada una de estas matrices halla una matriz regular P tal que $D = PAP^t$ siendo D matriz diagonal reducida.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Para cada una de las matrices

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{d) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

halla las descomposiciones:

i) $D = P\,A\,P^t$ con P triangular inferior y D diagonal con $d_{ii} > 0$ para todo i.

ii) A partir de la factorización anterior, halla Q regular y triangular inferior con $q_{ii} > 0$ para todo i tal que $I = Q\,A\,Q^t$.

iii) Justifica que las matrices anteriores admiten todas factorización LU. Halla dicha descomposición para cada una de las matrices dadas.

iv) Utiliza las factorizaciones de los apartados i), ii) e iii) para determina la factorización de Cholesky de estas matrices.

14. Considera $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétricas. Demuestra si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Si A y B son definidas positivas entonces $A + B$ es definida positiva.

(b) Si A es definida positiva y B es definida negativa entonces $A+B$ es indefinida.

(c) Si A es definida positiva y B es definida negativa entonces $A + B$ es o semidefinida positiva o semidefinida negativa.

(d) Si A y B son semidefinidas positivas entonces $A + B$ es semidefinida positiva.

(e) Si A y B son definidas negativas entonces $A - B$ es definida negativa.

(f) Si A es definida positiva entonces A es regular.

15. Contesta de forma razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, si $f(\,(1,1,1),\,(1,2,3)\,) = 0$ entonces $f(\,(-3,-3,-3),\,(3,6,9)\,) = 0$.

(b) Sean $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal y $\{v_1, v_2\}$ una base de V. Si $f(v_1, v_1) = f(v_2, v_2) = 0$ entonces $f(\,u, v\,) = 0,\ \forall\, u, v \in V$.

(c) Sea $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal y $\{\,v_1, v_2\,\}$ una base de V. Si $f(v_1, v_2) = f(v_2, v_1)$ entonces f es simétrica.