Problemas de Endomorfismos

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1. Sea $h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ de ecuación coordenada respecto de la base canónica $Y = AX$ donde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Prueba que el vector $u = (2, 1)$ es un vector propio de h e indica cuál es el valor propio asociado.
   (b) Comprueba que $u_\alpha = \alpha u$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ escalar no nulo, también es vector propio de h.
   (c) Demuestra que $v = (-1, 1)$ también es un vector propio de h asociado a otro valor propio de h.
   (d) Estudia si $u + v$ es o no vector propio de h.

2. Calcula los valores propios de $h \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ sabiendo que:
   - $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 2), (-3, 1, 4)\}$ es base de vectores propios,
   - $h(1, 0, 0) = (-3, -3, -4)$.

3. Para las siguientes matrices A determina una base para cada uno de sus subespacios fundamentales. En caso de ser diagonalizables, halla P regular tal que $D = P^{-1}AP$ con D matriz diagonal.
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Sean V un espacio vectorial real y h y f dos endomorfismos definidos sobre V que, respecto de la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ tienen por ecuaciones coordenadas $Y = A\,X$ y

$Y = B\,X$, respectivamente, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Estudia si los endomorfismos h , f, $(h \circ f)$ y $(f \circ h)$ son diagonalizables. En los casos afirmativos, determina una base de vectores propios así como la matriz coordenada respecto de dicha base.

5. Halla el endomorfismo h de $\mathbb{R}^3$ tal que $h(1,1,0) = (-1,-4,0)$ y tiene por subespacios fundamentales

$$S = \{\,(x,y,z) \mid x = 2y,\; z = 0\,\} \qquad \text{y} \qquad T = \{\,(x,y,z) \mid x - z = 0\,\}.$$

Calcula una matriz P regular tal que PAP^{-1} sea diagonal.

6. Calcula el endomorfismo h de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $h(1+x) = -1-4x$ y tiene por subespacios fundamentales

$$S = \{\,a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 = 2a_1,\; a_2 = 0\,\} \quad \text{y} \quad T = \{\,a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 - a_2 = 0\,\}.$$

Calcula una matriz P regular tal que PAP^{-1} sea diagonal. Compara este ejercicio con el anterior.

7. Estudia si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 10 \\ -3 & -1 & -5 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

es semejante a una matriz diagonal, según se trabaje en el cuerpo de los números reales o en el cuerpo de los números complejos.

8. Halla el valor del parámetro α de manera que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

sea semejante a la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

9. Considera el endomorfismo $h \in \operatorname{End}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que

$$h(a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2) = -a_2 + (a_0 + a_1 + a_2)\,x + (a_0 + 2a_2)\,x^2.$$

Calcula los subespacios fundamentales y, en caso de ser h un endomorfismo diagonalizable, determina una matriz Q tal que $D = Q\,A\,Q^{-1}$, con D matriz diagonal.

10. Sea $f \in \mathrm{End}(\mathcal{M}_2(\mathrm{I\!R}))$ definido por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}.$$

   (a) Determina A la matriz coordenada de f respecto de la base canónica.

   (b) Encuentra matrices P, Q tales que $B = PAQ$, siendo B la matriz coordenada de f respecto de la base

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) Estudia si f es biyectiva.

   (d) Analiza si f es un endomorfismo diagonalizable. En caso afirmativo, determina una base de vectores propios respecto de la cual la matriz coordenada es diagonal.

11. Sean V un espacio vectorial real, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V y $h \in \mathrm{End}(V)$ tal que

   - $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(h)$,
   - el polinomio característico de h es $x^2(x-1)(x+2)$,
   - $h(v_3) = -2v_1 + v_3$,
   - $h(v_4) = -2v_2 - 2v_4$.

   (a) Sin hacer ningún cálculo y teniendo en cuenta únicamente los datos que te dan en el enunciado, justifica que h es un endomorfismo diagonalizable.

   (b) Comprueba que los vectores $w_1 = v_2 + v_4$ y $w_2 = -2v_1 + v_3$ son vectores propios de h.

   (c) Da una base de vectores propios de h y calcula D, la matriz coordenada de h respecto de esa base.

   (d) Si A es la matriz coordenada de h respecto de la base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, halla P regular tal que $A = P\,D\,P^{-1}$.

   (e) ¿h es biyectivo?

   (f) Halla $\mathrm{Im}\, f$.

12. Ahora realiza cada uno de los apartados del ejercicio anterior para el caso en el que $V = M_2(\mathrm{I\!R})$ y $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es su base canónica.

13. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   (a) Sea $h \in \mathrm{End}(V)$ y λ valor propio de h. Entonces, existe una base de V formada por vectores propios asociados a λ, esto es, $h(v) = \lambda v,\ \forall v \in V$.

(b) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable, entonces A^k es diagonalizable con $k \in \mathbb{Q}$.

(c) Sea $h \in \operatorname{End} V$, si $\lambda = 0$ **no** es valor propio de h , entonces h es inyectiva.

(d) Sean $h \in \operatorname{End}(V)$ y λ y μ dos vectores propios de h distintos. Si tomamos $v \in V(\lambda)$ y $w \in V(\mu)$ entonces $v + w \in V(\lambda + \mu)$.

(e) Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, 0 es valor propio de $A \Leftrightarrow |A| = 0$.

(f) Sea $h \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R} \ni |\lambda I_n - A| = 0$. Entonces

$$v \in \operatorname{Ker}(h - \lambda 1_{\operatorname{End}(\mathbb{R}^n)}) \Leftrightarrow v \in V(\lambda).$$

(g) Sean V espacio vectorial real y $h \in \operatorname{End}(V)$. Se tiene que h biyectivo si y sólo si h inyectivo.