Problemas de Aplicaciones Lineales

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1. En los siguientes ejercicios determina si la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es lineal:

   (a) $f(x, y) = (3x - 2y, x + y)$.
   (b) $f(x, y) = (x + 2, x + y)$.
   (c) $f(x, y) = (3x - 2y, x + 2y - 3)$.

2. En los siguientes ejercicios determina si $f : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ es lineal:

   (a) $f(a + bx) = (a - 3b) + (a - b)x$.
   (b) $f(a + bx) = (a + b) + (a + b - 2)x$.
   (c) $f(a + bx) = (a - 2b) + abx$.
   (d) $f(p) = p^2$.

3. Sea f la aplicación lineal tal que $f(1, 1) = (3, 1)$ y $f(2, -2) = (-6, 2)$. Determina $f(x, y)$ y $f(-5, 1)$.

4. Sea $f : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ la aplicación lineal tal que $f(-1-x) = -3+x$ y $f(2+x) = 2+6x$. Determina $f(a + bx)$ y $f(x - 15)$.

5. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ la aplicación lineal tal que

$$\begin{aligned} f(1 + x + x^2) &= -1 + x, \\ f(1 + x - x^2) &= -3 + x, \\ f(1 - x + x^2) &= 1 + x. \end{aligned}$$

   Determina $f(a + bx + cx^2)$ y $f(-5 + 5x - x^2)$.

6. Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal tal que

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2 + v_3) &= (1, -1) \\ f(-v_1 + v_2 + v_3) &= (2, -1), \\ f(v_1 - v_2 + v_3) &= (1, 1). \end{aligned}$$

   Determina $f(x\, v_1 + y\, v_2 + z\, v_3)$.

7. Sea $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ la aplicación lineal definida como $f(ax^2 + bx + c) = (a - c)x^2 + (b - c)x$.

   (a) ¿Está $x^2 + x - 1$ en Ker f?
   (b) ¿Está $x^2 + x + 1$ en Ker f?

(c) ¿Está $x^2 - x$ en Im f?

(d) ¿Está $x^2 - x + 1$ en Im f?

(e) Determina una base para Ker f.

(f) Determina una base para Im f.

8. Halla en los siguientes ejercicios bases para el subespacio núcleo y el subespacio imagen de la aplicación f. En cada caso, comprueba el teorema de la dimensión.

   (a) $f(x, y, z) = (x - y, y - z, -x + z)$.

   (b) $f(x, y, z, t) = (x - y, y - t, z + t)$.

   (c) $f(x, y) = (x - 2y, x - 2y, 2x - 4y, 0)$.

   (d) $f(x, y) = (x, x + y, x)$

   (e) $f(a + bx + cx^2) = (a - b) + (b - c)x + (-a + c)x^2$.

   (f) $f(a + bx) = (a - 2b)x + (a - 2b)x^2 + (2a - 4b)x^3$.

9. Estudia si las siguientes aplicaciones son inyectivas/suprayectivas/biyectivas :

   (a) $f(x, y) = (x - 2y, -2x + y)$.

   (b) $f(a + bx + cx^2) = (2a - b) + (-b + c)x + (-3a + c)x^2$.

   (c) $f(a + bx) = (2a - b) + (a - b)x + (-a + b)x^2 + (a - 2b)x^3$.

   (d) $f(x, y) = (x - y, -x + 2y)$.

   (e) $f(a + bx + cx^2) = (c + bx + ax^2)$.

   (f) $f(x, y, z) = (x - y + z, -x + y + z)$.

   (g) $f(x, y) = (2x + y, -3x + 4y)$.

   (h) $f(a + bx + cx^2) = (a + b) + (a + c)x$.

   (i) $f(x, y) = (2x - y, x - y, -x + y, x - 2y)$.

   (j) $f(x, y, z) = (x - y + z, -x + y + z, -y + z)$.

   (k) $f(a + bx + cx^2) = c + bx + (a - b)x^2$.

10. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por $f(-1, 1, 3) = (6, -4, 16)$, $f(-2, 1, 1) = (-2, -5, 1)$ y $f(3, 2, -1) = (1, 14, -12)$.

    (a) Halla la ecuación coordenada de f respecto de la base canónica.

    (b) Determina Imf y Ker$f$ y estudia si f es un automorfismo.

11. Sea $f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, M_2(\mathbb{R}))$ definido por

    $$f(2, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } f(4, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

    (a) Determina $f(x, y)$.

    (b) Determina la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $M_2(\mathbb{R})$ respectivamente.

    (c) Halla Imf y Ker$f$.

12. Considera $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ dado por $f(0,0,-1) = (-1,-2,-3)$ y $f(s) = s,\ \forall s \in S,$ siendo

$$S = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0 \,\}.$$

Determina la ecuación de f respecto de la base canónica.

13. Sean V, W dos espacios vectoriales definidos sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $\{w_1, w_2, w_3\}$ bases de V y de W, respectivamente. Considera $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ dado por

$$f(v_1) = w_1 - w_3 \quad f(v_2) = w_2 + w_3, \quad f(v_3) = v_3, \quad f(v_4) = 0_W.$$

Determina la ecuación $Y = AX$ de f respecto de las bases anteriormente dadas. Estudia si f es monomorfismo y si es un epimorfismo.

14. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de V. Considera $f, g \in \mathrm{End}(V)$ dados por:

$$\begin{array}{lll} f(u_1) = u_1 - u_2 + u_3, & f(u_2) = u_2, & f(u_3) = u_3, \\ g(u_1) = u_1 - u_2, & g(u_2) = u_1 + u_2, & g(u_3) = u_3. \end{array}$$

Respecto de la base B, determina las matrices coordenadas de los endomorfimos de V : f, g, $(f+g)$, $(f \circ g)$, $(g \circ f)$ y (tf) con $t \in \mathbb{R}$.

15. Sean $V = \mathbb{R}^4$ y $W = \mathbb{R}^3$. Considera la aplicación

$$f(x,y,z,t) = (3x, 2y, z).$$

(a) Determina la matriz coordenada de f respecto de las bases canónicas.

(b) Demuestra que f es suprayectiva.

(c) Halla $\mathrm{Ker} f$.

16. Sean $V = \mathbb{R}_3[x]$ y $W = \mathbb{R}_2[x]$. Considera la aplicación

$$f(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1,$$

es decir, la aplicación que asocia a cada polinomio su derivada.

(a) Determina respecto de las bases canónicas la matriz coordenada de f.

(b) Demuestra que f es un epimorfismo.

(c) Halla $\mathrm{Ker} f$.

17. Sea $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definido por $f(x,y,z) = (x+y, x+y+z)$.

(a) Halla B matriz coordenada de f respecto de $\{(1,1,1), (0,1,1), (1,0,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y $\{(1,2), (0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

(b) Si se denota por A a la matriz coordenada de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Justifica que A y B son matrices equivalentes y encuentra las matrices que establecen tal equivalencia.

18. Sea $f \in \mathrm{End}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ definido por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

(a) Determina A la matriz coordenada de f respecto de la base canónica.

(b) Encuentra matrices P, Q tales que $B = PAQ$, siendo B la matriz coordenada de f respecto de la base

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Estudia si f es biyectivo.

19. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - 2x_3\,,\, -x_1 + 4x_2 + 5x_3).$$

(a) Prueba que $f \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

(b) Determina la ecuación coordenada $Y = AX$ respecto de las bases canónicas.

(c) Halla $\mathrm{Im}\, f$ y $\mathrm{Ker}\, f$.

(d) Halla la ecuación $\widetilde{Y} = B\widetilde{X}$ respecto de las bases:
$\{\,(1,0,1)\,,\,(1,1,0)\,,\,(1,1,1)\,\}$ y $\{\,(2,1)\,,\,(1,2)\,\}$.

(e) Halla $P \in \mathrm{GL}\,(3)$ y $Q \in \mathrm{GL}\,(2)$ tales que $B = P\,A\,Q$.

20. Sea $f \in \mathrm{Hom}\,(\,\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\,)$ que hace corresponder a los vectores $(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0)$ los vectores $(0,1), (0,1), (1,1)$ respectivamente.

(a) Construye la matriz coordenada de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

(b) Determina $f(S)$ siendo $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

(c) Halla $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im} f$.

21. Sea $h \in \mathrm{End}\,(\,\mathbb{R}^4\,)$ verificando:

- $\mathrm{Ker}\, h = \{\,(\,x, y, z, t\,) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0, \;\; t = 0\,\}$
- Los vectores $(\,1,1,1,0\,)$ y $(\,0,0,0,1\,)$ son fijos.

(a) Construye la matriz coordenada de h respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

(b) Determina la matriz del endomorfismo respecto de la base:
$B' = \{\,(\,1,1,1,1\,), (\,0,1,1,1\,), (\,0,0,1,1\,), (\,0,0,0,1\,)\,\}$.