Problemas de Espacios Vectoriales

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales?

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{(x,y,z)/2x-y=0, z+y=0\},\\
S_2 &= \{(x,y,z)/y=3\},\\
S_3 &= \{(x,y,z)/x=z+y\},\\
S_4 &= \{(x,y)/x<0\},\\
S_5 &= \{(x,y,z)/x=y=0\},\\
S_6 &= \{(x,y,z)/y=x-1\},\\
S_7 &= \{(x,y,z,t)/y\in\mathbb{Z}\},\\
S_8 &= \{(x,y,z,t)/x+y=1\}.
\end{aligned}$$

2. Halla un sistema generador del subespacio de $\mathbb{R}^3$:

$$S=\{(x,y,z)\,/\,x=a+2b+3c, y=a-b, z=-b-c,\ a,b,c\in\mathbb{R}\}.$$

Estudia si $(5,-1,-1)\in S$ y $(0,0,-1)\in S$.

3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes? Para aquellos que lo sean, expresa un vector como una combinación lineal del resto.

   (a) $\{(1,-2,-1),(3,3,6)\}$,
   (b) $\{(4,2,1),(2,6,-5),(1,-2,3)\}$,
   (c) $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(-3,6,6)\}$,
   (d) $\{(1,2,3),(1,1,1),(1,0,1)\}$.

4. Indica si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o no:

   (a) $\mathbf{v_1}-\mathbf{v_2},\mathbf{v_2}-\mathbf{v_3},\mathbf{v_3}-\mathbf{v_4},\mathbf{v_4}-\mathbf{v_5}$, siendo $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3},\mathbf{v_4},\mathbf{v_5}$ vectores linealmente independientes,
   (b) $\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{w}+\mathbf{u}$, siendo $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ linealmente independientes.

5. Determina una base para los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{(x,y,z)/x=y-z\},\\
S_2 &= \{(x,y,z)/y=2z\},\\
S_3 &= \{(x,y,z)/y=0\}\\
S_4 &= \mathbb{R}<(1,2,2),(3,2,1),(1,1,0),(1,-1,1)>.
\end{aligned}$$

6. Determina una base para los siguientes subespacios de $\mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\, a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,/ a_0 = a_1 - a_2\}, \\ S_2 &= \{\, a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,/ a_1 = a_3\}, \\ S_3 &= \{\, a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,/ a_2 = 0\}. \end{aligned}$$

7. En cada uno de los siguientes casos determina una base de S subespacio de V:

   (a) $V = \mathbb{R}^5$ y $S = \mathbb{R} < \{(1, -1, 0, 2, 0),\ (0, 0, -1, 0, 1),\ (1, -1, 1, 1, 0),\ (0, 0, 1, 1, 1)\} >$.

   (b) $V = \mathrm{P}_3[x]$ y $S = \mathbb{R} < \{\, (x^2 - 1),\ (3x^2 + 1),\ x^3,\ (2x^3 + 4x^2)\,\} >$.

   (c) $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $S = \mathbb{R} < \{A_1, A_2, A_3, A_4\} >$, donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Determina todos los valores de a para los cuales $\{(a^2, 0, 4), (0, a, 3), (1, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

9. Sean $V = \mathbb{R}_2[x]$ y $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ con $a_2 \neq 0$. Demuestra que $\{p(x),\ p'(x),\ p''(x)\}$ forman base de $\mathbb{R}_2[x]$.

10. Halla las coordenadas del polinomio $p(x) = 5x^4 + 6x^3 - 4x + 2 \in \mathbb{R}_4[x]$ respecto de la base $B = \{\, 1,\ (x-1),\ (x-1)^2,\ (x-1)^3,\ (x-1)^4 \,\}$.

11. En el espacio vectorial real $V = \mathbb{R}^4$ se consideran los subconjuntos

$$\begin{aligned} S &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}, \\ T &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}. \end{aligned}$$

   (a) Comprueba que S y T son subespacios de V.

   (b) Determina una base de S y una de T.

   (c) Comprueba que S y T son subespacios suplementarios respecto de V.

12. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \,/\, x + y = 0\}, \\ T &= \{(a, 2a, -a) \,/\, a \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

    Prueba que $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$.

13. Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y los subespacios

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z)/x = 0\}, \\ S_2 &= \{(x, y, z)/z = 0\}, \\ S_3 &= \{(x, y, z)/y = 2x = 0\}. \end{aligned}$$

   (a) Comprueba que $S_2 + S_3 \neq S_2 \cup S_3$.

   (b) Comprueba que la suma $S_1 + S_2$ no es directa.

(c) Prueba que $\mathbb{R}^3 = S_2 \oplus S_3$

14. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y se consideran los subespacios vectoriales:

$$S = \mathbb{R} < \{(1,2,1),\, (1,3,2)\} >, \quad T = \mathbb{R} < \{(1,1,0),\, (3,8,5), (5,10,5)\} > .$$

   (a) Halla bases de S y de T.

   (b) Estudia si $S = T$.

15. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$

   (a) $S = \mathbb{R} < \{(1,-1,0,0),\, (0,1,1,0),\, (2,-1,1,0)\, (3,-3,0,0)\} >$.

   (b) $S = \{(x,y,z,t) : x+y+z+t = 0, \quad x-y+z-t = 0\}$

   Halla un subespacio suplementario de cada S respecto de $\mathbb{R}^4$.

16. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,y,z)/x+y+z=0\}, \\ S_2 &= \{(x,y,z)/y=2x, z=3x\}. \end{aligned}$$

   Prueba que $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$.

17. En $\mathbb{R}^3$ se considera el subespacio

$$S = \{(x_1,x_2,x_3)\,/\,x_1+x_2-x_3=0,\ x_1-x_2+x_3=0\}.$$

   (a) Halla un subespacio T suplementario de S respecto de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Teniendo en cuenta que $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$, descompón el vector $\mathbf{v} = (2,1,2)$ como suma de un vector de S y otro de T.

18. Sean

$$S = \mathbb{R}\langle(1,1,1),(1,0,1)\rangle, \qquad T = \mathbb{R}\langle(2,1,0),(3,1,0)\rangle.$$

   Da las ecuaciones que definen los espacios S y T. Da una base de $S \cap T$. Da base y ecuaciones de un suplementario de $S \cap T$. Da una base de $S+T$.

19. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios S_1, S_2 engendrados por las familias:

$$\begin{aligned} &A_1 = \{(1,1,1,1),\, (1,-1,1,-1)\}, \\ &A_2 = \{(1,1,0,1),\, (1,2,-1,2),\, (3,5,-2,5)\}, \end{aligned}$$

   respectivamente. Encuentra $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$. ¿Son S_1 y S_2 suplementarios respecto de $\mathbb{R}^4$?

20. Sea $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \, c = d \right\},$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \, a = b = 0,\, c = -d \right\}.$$

(a) Comprueba que $S, T \leq V$.
(b) Halla una base de cada uno de estos subespacios.
(c) Calcula $S \cap T,\ S + T$ y justifica si se cumple que $V = S \oplus T$.
(d) Halla una base de V que contenga a las bases ya determinadas en el apartado (b).
(e) Comprueba que $B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ es base de V con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(f) Calcula las coordenadas (respecto de la base B) de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Sea $V = \mathbb{R}_4[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que cuatro de coeficientes reales. Sean

$$\begin{aligned} B_1 &= \{\, x, (x^2+1), (2x^4+x^3), (x^3-x^2+x), (x^2+x) \,\}, \\ B_2 &= \{\, (2x^4+1), (x^3-1), (x^3+2x), x^2, (x^3-x^2) \,\} \end{aligned}$$

dos bases de V.

(a) Halla la matriz del cambio de cada una de las base de B_1 a B_2.
(b) Determina las coordenadas del polinomio $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ respecto de las bases B_1 y B_2.

22. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ tal que $\dim V = 6$ y S_1, S_2 subespacios de V distintos tal que $\dim S_1 = \dim S_2 = 4$. Halla las posibles dimensiones de $S_1 \cap S_2$.

23. Sea $\{u, v, w\}$ una familia ligada de vectores de V (espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$). Razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Se verifica que $v \in \mathbb{K} < \{u, w\} >$.
(b) Alguno de los tres es combinación lineal de los otros dos.
(c) $\dim \mathbb{K} < \{u, v, w\} >= 2$.

24. Sean $S = \mathbb{K} < \{v_1, v_2\} >$ y $T = \mathbb{K} < \{u_1\} >$ subespacios vectoriales de V. Razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Se verifica que $S + T = \mathbb{K} < \{v_1, v_2, u_1\} >$.
(b) $A = \{v_1, v_2, u_1\}$ es base de $S + T$.
(c) Además, $S \oplus T$.
(d) $\dim V \geq 3$.

25. Sea V en espacio vectorial tal que $\dim V = n$ y sean S, T subespacios de V. Justifica si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Sean S y $T \leq V$ (cualesquiera) tal que $\dim S = \dim T$ entonces $S = T$.
(b) Sean S y $T \leq V$ (cualesquiera) tal que $\dim S = \dim T = r$ entonces $\dim V \geq 2r$.
(c) Si $\dim V = \dim(S + T)$ entonces $S \oplus T$.
(d) Sean $\{v_1, \ldots, v_r\}$ sistema generador de S y de T, entonces $S \cap T \neq \{0_V\}$.