Aplicaciones Lineales

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1 Concepto y propiedades

1.1 Definición

Dados V, W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, se llama *aplicación lineal* (u *homomorfismo de espacios vectoriales*) a toda aplicación $f : V \longrightarrow W$ que verifica

- $\forall v_1, v_2 \in V \ f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
- $\forall \lambda \in K \ \forall v \in V \ f(\lambda v) = \lambda f(v))$

Notación: $f \in Hom(V, W)$

1.2 Proposición

$f : V \longrightarrow W$ es lineal $\Longleftrightarrow \forall v_1, v_2 \in V \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$
$f(\lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2) = \lambda_1.f(v_1) + \lambda_2.f(v_2)$

1.3 Propiedades

$f : V \longrightarrow W$ aplicación lineal

1. $f(0_V) = 0_W$
2. $\forall v \in V, \ f(-v) = -f(v)$
3. $\forall S \leq V \quad f(S) \leq W$
4. $\forall T \leq W \quad \overleftarrow{f}(T) \leq V$

1.4 Recordatorio:

Sean dos conjuntos A y B y una aplicación $f : A \longrightarrow B$.

Dado un subconjunto $B' \subseteq B$ se llama *imagen recíproca de* B' al conjunto:

$$\overleftarrow{f}(B') = \{ a \in A \,|\, f(a) \in B' \}$$

1.5 Definición

Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ es:

- *inyectiva* si:
  $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ ó $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- *suprayectiva* si: $\forall y \in B \; \exists \, x \in A \ni f(x) = y$ ó $Imf = B$
- *biyectiva* si es inyectiva y suprayectiva, es decir:
  $\forall y \in B \; \exists | x \in A \ni f(x) = y$

1.6 Definición

$f : V \longrightarrow W$ aplicación lineal se dice:

- *monomorfismo* si es inyectiva
- *epimorfismo* si es suprayectiva
- *isomorfismo* si es biyectiva

1.7 Definición

$f : V \longrightarrow W$ aplicación lineal.

- Se llama *Núcleo de f* al conjunto

$$Ker\, f \;=\; \{v \in V \,/\, f(v) \;=\; 0_W\} \;=\; \overleftarrow{f}(0_W)$$

- Se llama *Imagen de f* al conjunto

$$Im\, f \;=\; \{w \in W \,/\, \exists v \in V \,,\, f(v) \;=\; w\} \;=\; f(V)$$

1.8 Proposición

$f\ : V \longrightarrow W$ aplicación lineal $\Longrightarrow$

- $Ker\, f\ \leq V$
- $Im\, f\ \leq W$

1.9 Definición

$f\ : V \longrightarrow W$ aplicación lineal. Se llama *rango de* f a la dimensión de $Im\, f$, esto es,

$$rang\, f\ =\ dim\, Im\, f$$

1.10 Propiedades

$f\ : V \longrightarrow W$ aplicación lineal

1. f inyectiva $\Longleftrightarrow Ker\, f\ =\ \{0_V\}$
2. f inyectiva $\Longleftrightarrow (\{a_i\}_{i=1}^n$ libre en $V \Longrightarrow (\{f(a_i)\}_{i=1}^n$ libre en $W)$

1.11 Definición

V espacio vectorial de dimensión finita sobre K. Dada una base $\{a_1, \cdots, a_n\}$ de V se llama *sistema coordenado definido en* V *por la base* $\{a_i\}$ al isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} g: & V \longrightarrow & K^n \\ & v \mapsto & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \end{array}$$

tal que $v\ =\ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$

1.12 Teorema

Sean V, W e.v. sobre K tales que $dim\, V = n$, $dim\, W = m$.
Sea $f\ : V \longrightarrow W$ aplicación lineal. Entonces

1. $\{a_1, \cdots, a_n\}$ base de $V \Longrightarrow Im\, f\ =\ K < \{f(a_1), \cdots, f(a_n)\} >$
2. f isomorfismo $\Longrightarrow dim\, V\ =\ dim\, W$

1.13 Teorema

$f \in Hom(V,W) \Longrightarrow dim\, V = dim\, Ker\, f + dim\, Im\, f$

1.14 Matriz coordenada de una aplicación lineal

Sean V, W e.v. sobre K de dimensión finit, $f: V \longrightarrow W$ aplicación lineal, $\{a_1, \cdots, a_n\}$ base de V y $\{b_1, \cdots, b_m\}$ base de W.
$a_i \in V \Longrightarrow f(a_i) \in W \Longrightarrow f(a_i) = t_{1i}\, b_1 + \cdots + t_{mi}\, b_m$, $i = 1, \cdots, n \Longrightarrow$ se puede escribir el sistema en forma matricial

$$(f(a_i))^t = (b_j)^t A$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{pmatrix}$$

la *matriz coordenada de f respecto de las bases* $\{a_i\}$ *y* $\{b_j\}$ (las columnas de A están formadas por las coordenadas de $f(a_i)$ respecto de la base $\{b_j\}$).

Sea un vector v cualquiera de V.

$X = (x_1, \cdots, x_n)^t$ coordenadas de v respecto de la base $\{a_i\}$, luego $v = (a_i)^t X$
$Y = (y_1, \cdots, y_m)^t$ coordenadas de $f(v)$ respecto de la base $\{b_j\}$, luego $f(v) = (b_j)^t Y$

y como se tiene $f(v) = (f(a_i))^t X = (b_j)^t A\, X$, de todo esto se deduce que

$$Y = A\, X$$

ecuación coordenada de f respecto de las bases $\{a_i\}$ *y* $\{b_j\}$ *por columnas.*

1.15 Matrices equivalentes

Sean V, W e.v. sobre K de dimensión finita. $f: V \longrightarrow W$ aplicación lineal.

$\{a_i\}_{i=1}^n$ y $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ bases de V

$\{b_j\}_{j=1}^m$ y $\{\beta_j\}_{j=1}^m$ bases de W

$\alpha_i \in V \Longrightarrow \alpha_i \in K < \{a_1, \cdots, a_n\} > \Longrightarrow (\alpha_i)^t = (a_i)^t P$ con $P \in GL(n)$

$\beta_j \in W \Longrightarrow \beta_j \in K < \{b_1, \cdots, b_m\} > \Longrightarrow (\beta_j) = (b_j)^t Q$ con $Q \in GL(m)$,

Para cualquier v de V denotamos
$X = (x_1, \cdots, x_n)^t$ coordenadas de v respecto de la base $\{a_i\}$
$\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n)^t$ coordenadas de v respecto de la base $\{\alpha_i\}$

Para cualquier w de W denotamos
$Y = (y_1, \cdots, y_m)^t$ coordenadas de w respecto de la base $\{b_j\}$
$\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_m)^t$ coordenadas de w respecto de la base $\{\beta_j\}$

Se tiene

$v = (a_i)^t X, = (\alpha_i)^t \tilde{X} = (a_i)^t P \tilde{X} \Longrightarrow$

$$X = P \tilde{X}$$

$w = (b_j)^t Y = (\beta_j)^t \tilde{Y} = (b_j)^t Q \tilde{Y} \Longrightarrow$

$$Y = Q \tilde{Y}$$

Por otra parte, se tiene

$Y = A X$ ecuación coordenada de f respecto de $\{a_i\}$ y $\{b_j\}$

$\tilde{Y} = B \tilde{X}^t$ ecuación coordenada de f respecto de $\{\alpha_i\}$ y $\{\beta_j\}$.

De las ecuaciones:
$Y = A X$
$\tilde{Y} = B \tilde{X}$
$X = P \tilde{X}$
$Y = Q \tilde{Y}$

se deduce que $A X = Q \tilde{Y} = Q B \tilde{X}$ y que $A X = A P \tilde{X}$ (para cualquier X) $\Longrightarrow$

$$B = Q^{-1} A P$$

1.16 Definición

$A,\, B \in M_{n\times m}(K)$ son *matrices equivalentes* si $\exists P_1 \in GL(n), \exists P_2 \in GL(m)$ tal que $B = P_1.A.P_2$.

1.17 Proposición

La relación R definida por
$A, B \in M_{n\times m}(K),\; A\,R\,B \iff A$ y B son equivalentes
es una relación de equivalencia.

1.18 Definición

Sea V e.v. sobre un cuerpo K. Toda aplicación lineal $f : V \longrightarrow V$ se llama *endomorfismo*.

$$f \in End(V)$$

1.19 Definición

Si $f : V \longrightarrow V$ es un endomorfismo biyectivo entonces se denomina *automorfismo*.

$$f \in Aut(V)$$

1.20 Definición

$A,\, B \in M_n(K)$ son *matrices semejantes* si $\exists P \in GL(n)$ tal que $B = P.A.P^{-1}$.

1.21 Propiedades

- $(Hom(V, W), +, \cdot_K)$ es espacio vectorial sobre K.
- $(End(V), +, \circ)$ es anillo unitario.
- $(Aut(V), \circ)$ es grupo.