Valores y vectores propios. Diagonalización

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

Ejercicio. Sean $h \in \mathrm{End}(V)$, A y B matrices coordenadas de h respecto de las bases $\{a_i\}_{i=1}^n$ y $\{b_i\}_{i=1}^n$, respectivamente. Prueba que A y B son semejantes, es decir, existe una matriz regular P tal que $B = P^{-1}AP$.

Definición. Sea $h \in \mathrm{End}(V)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ se dice *valor propio de* h si existe $v \in V \setminus \{0_V\}$ tal que $h(v) = \lambda v$. El vector v se dice *vector propio asociado a* λ.

Definición. Sea $h \in \mathrm{End}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ valor propio de h, se llama *subespacio fundamental asociado a* λ al conjunto

$$V(\lambda) = \{v \in V \,/\, h(v) = \lambda v\}.$$

$\dim V(\lambda)$ se dice *multiplicidad geométrica del valor propio* λ.

Ejercicio. Sea $h \in \mathrm{End}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ valor propio de h. Prueba que $V(\lambda)$ es subespacio de V.

Definición. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ se llama *polinomio característico de* A al polinomio $|xI_n - A|$.

Definición. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ se llama *ecuación característica de* A a la ecuación $|xI_n - A| = 0$.

Ejercicio. Comprueba que dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

Definición. Dado $h \in \mathrm{End}(V)$ se llama *polinomio característico de* h al polinomio característico de una cualquiera de sus matrices coordenadas.

Ejercicio. Prueba que los valores propios de un endomorfismo son las raíces de su polinomio característico.

Definición. Sea $h \in \mathrm{End}(V)$, se llama *multiplicidad algebraica del valor propio* λ, $\mathrm{m}(\lambda)$ a su multiplicidad como raíz de la ecuación característica de h.

Definición. Un endomorfismo h de V se dice *diagonalizable* si existe una base de V respecto de la cual, la matriz coordenada de h es diagonal.

Observación. D matriz coordenada diagonal de $h \in \mathrm{End}(V)$ respecto de la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ si y sólo si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de vectores propios de V donde

$$h(v_i) \;=\; d_{ii}\, v_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

luego d_{ii} es valor propio asociado al vector propio v_i para $i = 1, \ldots, n$.

Proposición. Sean $h \in \mathrm{End}(V)$ y $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, k$ valores propios distintos. Si $v_i \in V(\lambda_i) \setminus \{0_V\}$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ entonces la familia de vectores propios $\{v_1, \cdots, v_k\}$ es libre en V.

Proposición. Si λ valor propio de $h \in \mathrm{End}(V)$ entonces

$$1 \leq \dim V(\lambda) \;\leq\; \mathrm{m}(\lambda).$$

Teorema. Caracterización de diagonalizabilidad

$h \in \mathrm{End}(V)$ es diagonalizable si y sólo si para todo valor propio λ se cumple:

1. $\lambda \in \mathbb{K}$,
2. $\dim V(\lambda) \;=\; \mathrm{m}(\lambda)$.

Definición. Sean $h \in \mathrm{End}(V)$ y S un subespacio de V. Se dice que el subespacio S es $h-$*invariante* si $h(s) \in S$ para todo $s \in S$.

Ejercicio. Comprueba que si λ es valor propio de $h \in \mathrm{End}(V)$ entonces $V(\lambda)$ es $h-$invariante.

Observación. Si $h \in \mathrm{End}(V)$ es diagonalizable y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ sus valores propios (distintos), entonces

$$V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_r).$$