Espacios vectoriales

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1 Concepto de espacio vectorial y propiedades

1.1 Definición

Se llama *espacio vectorial sobre* K *(*$\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$ a toda terna $(V, +, \cdot_K)$ donde V es un conjunto, $(+) : V \times V \longrightarrow V$ una operación interna y $(\cdot_K) : K \times V \longrightarrow V$ operación externa con dominio de operadores en K verificando las propiedades:

- $(V, +)$ es grupo conmutativo.
  - *asociativa* $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$, $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
  - *existencia elemento neutro* $\exists\, e \in V \ni \forall v \in V$
    $v + e = e + v = v$
    Nota: e se denota como 0_V
  - *existencia elemento simétrico* $\forall v \in V$, $\exists v' \in V \ni v + v' = v' + v = 0_V$
    Nota: v' se denota como $-v$
  - *conmutativa* $\forall\, v_1, v_2 \in V$, $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
- $\forall \lambda \in K\ \forall v_1, v_2 \in V \quad \lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$
- $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K\ \forall v \in V \quad (\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$
- $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K\ \forall v \in V \quad (\lambda_1 \lambda_2)v = \lambda_1(\lambda_2 v)$
- $\forall v \in V \quad 1_K v = v$

Los elementos de V se llaman *vectores* y los de K se llaman *escalares*.

1.2 Propiedades

Dado V espacio vectorial sobre K

1. $\lambda 0_V = 0_V \quad \forall \lambda \in K$
2. $0_K v = 0_V \quad \forall v \in V$
3. $\lambda(-v) = -\lambda v \quad \forall \lambda \in K, \forall v \in V$
4. $\lambda v = 0_V \Longrightarrow \lambda = 0_K \vee v = 0_V$

2 Subespacios vectoriales

2.1 Definición

Sea $(V, +, \cdot_K)$ espacio vectorial sobre K. $S \subseteq V$ $S \neq \emptyset$ se dice *subespacio vectorial de* V si tiene estructura de espacio vectorial sobre K con las mismas leyes que V. **Notación:** $S \leq V$

2.2 Caracterización de subespacio vectorial

Dado $(V, +, \cdot_K)$ espacio vectorial sobre K.

$S \neq \emptyset \ \wedge \ S \subseteq V$ es subespacio vectorial de $V \Longleftrightarrow$

1. $\forall v_1, v_2 \in S$, $v_1 - v_2 \in S$
2. $\forall t \in K$, $\forall v \in S$, $t \cdot v \in S$

2.3 Propiedades

1. $S, T \subseteq V$ $S + T = \{v \in V \,/\, \exists v_S \in S \wedge \exists v_T \in T \ni v = v_S + v_T\}$.

   $S, T \leq V \Longrightarrow S + T$ es el menor subespacio vectorial que contiene a S y a T y se llama *subespacio suma*.

2. $S, T \subseteq V$ $S \cap T = \{v \in V \,/\, v \in S \wedge v \in T\}$.

   $S, T \leq V \Longrightarrow S \cap T$ es el mayor subespacio vectorial contenido en S y en T y se llama *subespacio intersección*.

3. $S, T \subseteq V\ S \cup T = \{v \in V \,/\, v \in S \vee v \in T\}$.

   $S, T \leq V \not\Longrightarrow S \cup T \leq V$.

3 Suma directa

3.1 Definición

Sea V espacio vectorial sobre un cuerpo K. Dados n subespacios de V, $S_1, S_2, \cdots, S_n$ se dice que su *suma es directa* y se representa por

$$S = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n$$

si verifica:

$$\forall v \in S,\ \exists | v_i \in S_i, \ni v = v_1 + \cdots + v_n$$

3.2 Propiedades

Sea V espacio vectorial sobre un cuerpo K y $S_1, \cdots, S_n \leq V$

1. $S = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n \Longleftrightarrow (0_V = a_1 + \cdots + a_n \Longrightarrow a_i = 0_V,\ i = 1, \cdots, n)$
2. $S = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n \Longrightarrow S_i \cap S_j = \{0_V\}$ si $i \neq j$.

   Nota: El recíproco no es cierto siempre.
3. $S = S_1 \oplus S_2 \Longleftrightarrow S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$

3.3 Definición

Sea V un espacio vectorial sobre K cuerpo. S, $T \leq V$ se dicen *subespacios suplementarios respecto de* V si $S \oplus T = V$

4 Dependencia lineal

4.1 Definición

Sea V e.v. sobre K cuerpo. Dado un conjunto de índices I (finito o no) se llama *familia de vectores de* V a toda aplicación

$$\begin{array}{rrcl} F: & I & \longrightarrow & V \\ & i & \mapsto & v_i \end{array}$$

Notación: $F = \{v_1, v_2, \cdots\}$.

4.2 Definición

Dada una familia de vectores $\{v_i\}_{i\in I}$ de V, se llama *combinación lineal* de $\{v_i\}_{i\in I}$ a todo vector

$$v = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i, \ \ \lambda_i \in K, \ \forall i \in I$$

.

4.3 Definición

Dada una familia de vectores $\{v_i\}_{i\in I}$ de V, se llama *clausura lineal* de $\{v_i\}_{i\in I}$ al conjunto formado por todas sus combinaciones lineales, que denotaremos por:

$$K < \{v_i\}_{i\in I} >$$

Nota $K < \{v_i\}_{i\in I} >$ es subespacio vectorial de V.

4.4 Definición

Dos familias de vectores de V, $\{v_i\}_{i\in I}$ y $\{w_j\}_{j\in J}$ ($I \neq J$ en general) son *familias equivalentes* si

$$K < \{v_i\}_{i\in I} > = K < \{w_j\}_{j\in J} >$$

4.5 Definición

Una familia de vectores $\{v_i\}_{i\in I}$ de V, se dice *familia libre* si

$$\sum_{i\in I}\lambda_i v_i = 0_V \implies \lambda_i = 0_K,\ \forall i \in I$$

Se dice que los *vectores* son *linealmente independientes.*

4.6 Definición

Una familia de vectores $\{v_i\}_{i\in I}$ de V, se dice *familia ligada* si

$$\sum_{i\in I}\lambda_i v_i = 0_V \implies \exists j \in I \ni \lambda_j \neq 0_K$$

Se dice que los *vectores* son *linealmente dependientes.*

4.7 Definición

Se llama *rango de una familia de vectores* de V al número de vectores linealmente independientes.

5 Base de un espacio vectorial

Sea V espacio vectorial sobre un cuerpo K

5.1 Definición

Una familia de vectores $\{v_i\}_{i\in I}$ de V, se llama *sistema generador de V* si

$$K < \{v_i\}_{i\in I} >= V$$

5.2 Definición

Un *espacio vectorial* V se dice *finito* si posee al menos un sistema generador formado por un número finito de elementos.

5.3 Definición

Se llama *base de un espacio vectorial* V a todo sistema generador cuyos vectores son linealmente independientes.

5.4 Propiedades

1. Una familia de vectores de V es base de $V \Longleftrightarrow$ es libre maximal.
2. Una familia de vectores de V es base de $V \Longleftrightarrow$ es sistema generador minimal.
3. Toda familia libre de vectores de V puede completarse hasta obtener una base de V.
4. Todas las bases de un espacio vectorial finito tienen el mismo número de elementos.

6 Dimensión

6.1 Definición

Si V es un espacio vectorial, se llama *dimensión de* V al número de elementos de sus bases.
Si V no es finito, se dice que es de *dimensión infinita*.

6.2 Propiedades

Generalmente consideramos que V es espacio vectorial de dimensión finita

1. Si $S \leq V \Longrightarrow dim\, S \leq dim\, V$
2. Si $S \leq V,\ dim\, S = dim\, V \Longrightarrow S = V$
3. $S, T \leq V,$

$$dim\,(S + T) = dim\, S + dim\, T - dim(S \cap T)$$

   (*Fórmula de dimensiones*)

4. $S, T \leq V,\ dim\,(S \oplus T) = dim\, S + dim\, T$

5. $S \times T = \{(v_s, v_t) \in V \times V \,/\, v_s \in S \wedge \, v_t \in T\}$

Si $S, T \leq V$, $\;dim\,(S\, \times\, T) \;=\; dim\,S\, +\, dim\,T$

6.3 Proposición

V espacio vectorial de dimensión n. Dada una base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de V se verifica

$$\forall v \in V \;\exists|(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in K^n \;\ni\; v \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

6.4 Definición

V espacio vectorial de dimensión n y $\{v_1, \cdots, v_n\}$ una base dada en V. Dado $v \in V$ se llaman *coordenadas del vector v respecto de la base* $\{v_i\}$ a los únicos escalares $\lambda_i \in K$, $i = 1, \cdots, n$ tal que $v \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$

6.5 Cambio de base

Sean $\{v_1, \cdots, v_n\}$ y $\{\tilde{v}_1, \cdots, \tilde{v}_n\}$ dos bases de V.

Como los vectores $\tilde{v}_i$ están en V, tendrán unas coordenadas respecto de la base $\{v_i\}$, es decir

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= \lambda_{11}\, v_1 + \cdots + \lambda_{n1}\, v_n \\ &\vdots \\ \tilde{v}_n &= \lambda_{1n}\, v_1 + \cdots + \lambda_{nn}\, v_n \end{aligned}$$

Es decir, se tiene:

$$(\,\tilde{v}_1 \quad | \quad \cdots \quad | \quad \tilde{v}_n\,) \;=\; (\,v_1 \quad | \quad \cdots \quad | \quad v_n\,) \begin{pmatrix} \lambda_{11} & | & & | & \lambda_{1n} \\ \vdots & | & \cdots & | & \vdots \\ \lambda_{n1} & | & & | & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

En forma matricial

$$(\tilde{v}_j)^t \;=\; (v_i)^t P$$

siendo P la matriz regular cuyas columna i-ésima está formada por las coordenadas de $\tilde{v}_i$ respecto de la base $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ y que se denomina *matriz de cambio de base.*

6.6 Cambio de coordenadas

Sea $v \in V$.
$X = (x_1, \cdots, x_n)^t$ coordenadas de v respecto de la base $\{v_i\}$
$\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n)^t$ coordenadas de v respecto de la base $\{\tilde{v}_j\}$

Luego:

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = (v_i)^t X$$

$$v = \tilde{x}_1 \tilde{v}_1 + \cdots + \tilde{x}_n \tilde{v}_n = (\tilde{v}_i)^t \tilde{X} = (v_i)^t P \tilde{X}$$

$$\Longrightarrow X = P\tilde{X}$$