Formas cuadráticas

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

A lo largo de todo el capítulo consideraremos que V un espacio vectorial real de dimensión finita n.

1 Formas bilineales simétricas

Definición. Se llama *forma bilineal sobre* V a toda aplicación $F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. $F(u_1 + u_2, v) = F(u_1, v) + F(u_2, v)$, $\forall u_1, u_2, v \in V$,
2. $F(u, v_1 + v_2) = F(u, v_1) + F(u, v_2)$, $\forall u, v_1, v_2 \in V$,
3. $F(\lambda\, u, v) = \lambda\, F(u, v)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$,
4. $F(u, \lambda\, v) = \lambda\, F(u, v)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$.

La forma bilineal F se dice *simétrica* si $F(u, v) = F(v, u)$ para todo $u, v \in V$.

Nota. Nosotros nos centraremos en el caso particular de formas bilineales simétricas.

1.1 Expresión coordenada de una forma bilineal

Sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ una base de V, entonces dados $u, v \in V$

$$u = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = (a_i)^t X, \qquad v = y_1 a_1 + \ldots + y_n a_n = (a_i)^t Y.$$

Como F es bilineal, se tiene

$$F(u, v) \;=\; F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_i\,,\, \sum_{j=1}^{n} y_j a_j\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\, F(a_i, a_j)\, x_i y_j\,].$$

De aquí se deduce la *expresión coordenada* de F respecto de la base $\{a_1, \ldots, a_n\}$:

$$F(u, v) = X^t A Y$$

donde $A = (\alpha_{ij})$ con $\alpha_{ij} = F(a_i, a_j)$, esto es,

$$A \;=\; \begin{pmatrix} F(a_1, a_1) & \ldots & F(a_1, a_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F(a_n, a_1) & \ldots & F(a_n, a_n) \end{pmatrix}$$

Esta matriz A se dice *matriz coordenada*de F respecto de la base $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Nota. Como F es simétrica, $F(a_i, a_j) = F(a_j, a_i)$ luego A es una matriz simétrica.

1.2 Cambio de coordenadas

Sean $\{a_i\}_{i=1}^n$ y $\{b_i\}_{i=1}^n$ dos bases de V y $u, v \in V$ tales que

$$\begin{aligned} u &= (a_i)^t X = (b_i)^t \tilde{X}, \\ v &= (a_i)^t Y = (b_i)^t \tilde{Y}. \end{aligned}$$

Consideremos $F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal de expresiones coordenadas

- respecto $\{a_i\}_{i=1}^n : F(u, v) = X^t AY$,
- respecto $\{b_i\}_{i=1}^n : F(u, v) = \tilde{X}^t B\tilde{Y}$.

Si hacemos el cambio de base $(b_i)^t = (a_i)^t P$ se tiene $X = P\tilde{X}$, $Y = P\tilde{Y}$ luego

$$F(u, v) = X^t AY = \tilde{X} P^t AP\tilde{Y}$$

de donde se deduce que $B = P^t AP$.

Definición. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dicen *congruentes* si existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ regular tal que $B = P^t AP$.

Observación. Todas las matrices coordenadas asociadas a una misma forma bilineal son congruentes entre sí y todas tienen el mismo rango.

Definición. Se llama *rango de F* al rango de cualquiera de sus matrices coordenadas.

Definición. Se dice que F es *regular* si sus matrices coordenadas son regulares, en otro caso se dice que F es *singular o degenerada.*

2 Bases conjugadas

Definición. Los vectores $u, v \in V$ se dicen *conjugados respecto de F* si $F(u, v) = 0$.

Nota. Si utilizamos la expresión coordenada de F respecto de la base $\{a_i\}_{i=1}^n$, el hecho de ser u y v vectores conjugados respecto de f significa

$$F(u, v) = X^t AY = 0$$

siendo X e Y las coordenadas en $\{a_i\}_{i=1}^n$ de u y v, respectivamente, y A la matriz coordenada de F respecto esta misma base. Por ello, también se suele decir que los vectores u y v son *conjugados respecto de A o A-conjugados.*

Definición. Una base de V $\{v_i\}_{i=1}^n$ se dice *conjugada respecto de F* si $F(v_i, v_j) = 0$ para todo $i \neq j$.

Propiedades.

- Siempre podemos encontrar una base de V, $\{v_i\}_{i=1}^n$, que sea conjugada respecto F.

- La matriz coordenada de F respecto de una base conjugada $\{v_i\}_{i=1}^n$ es una matriz diagonal D. Cuando esta matriz tiene elementos diagonales 1 ó -1 ó 0, es decir, es de la forma

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

  se dice *forma canónica reducida.*

- Toda matriz simétrica real es congruente con una matriz diagonal.

Definición. Sea $\{v_i\}_{i=1}^n$ una base de V conjugada respecto F y D (diagonal) su matriz coordenada asociada. Se llama *signatura de* F al número de elementos diagonales positivos, esto es, al número de vectores de la base $\{v_i\}_{i=1}^n$ tales que $F(v_i, v_i) > 0$.

Observaciones.

- La signatura de F no depende de la base conjugada sino que es una característica intrínseca de F. Así, todas las bases de V conjugadas respecto de F tienen la misma signatura (este resultado se conoce como *Ley de inercia de Sylvester*).

- Todas las matrices coordenadas de una misma forma bilineal simétrica tienen la misma signatura, y por tanto, todas las matrices simétricas congruentes tienen la misma signatura.

3 Formas cuadráticas

Definición. Sea F una forma bilineal simétrica, se llama *forma cuadrática asociada a* F a la aplicación $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$Q(v) = F(v, v), \qquad \forall v \in V.$$

Observación. Las definiciones, propiedades y resultados anteriores vistos para formas bilineales simétricas se pueden extender a las formas cuadráticas.

3.1 Expresión coordenada de una forma cuadrática

Sea una forma bilineal simétrica $F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ de expresión coordenada respecto de una base $\{a_i\}_{i=1}^n$ de V : $F(u, v) = X^t AY$. Entonces, la expresión coordenada de la forma cuadrática Q respecto de la base $\{a_i\}_{i=1}^n$ es

$$Q(u) = X^t AX$$

siendo$X = (x_1, \ldots, x_n)^t$ las coordenadas de un vector cualquiera $u \in V$ respecto de la base $\{a_i\}_{i=1}^n$.

3.2 Clasificación de formas cuadráticas

Definiciones. Una forma cuadrática $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice

- *Definida positiva* si $Q(v) > 0, \forall v \in V,\ v \neq 0_V$.
- *Definida negativa* si $Q(v) < 0, \forall v \in V,\ v \neq 0_V$.
- *Semidefinida positiva* si $Q(v) \geq 0, \forall v \in V$ y no es definida positiva.
- *Semidefinida negativa* si $Q(v) \leq 0, \forall v \in V$ y no es definida negativa.
- *Indefinida* en cualquier otro caso.

Nota. Una forma cuadrática $Q : V \longrightarrow K$ es definida positiva si sig$Q =$ dim$V$.

Definiciones. Se dice que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica es

- *Definida positiva* si $X^tAX > 0, \forall X \in \mathbb{R}^n,\ X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$
- *Definida negativa* si $X^tAX < 0, \forall X \in \mathbb{R}^n,\ X \neq 0_{\mathbb{R}^n}$
- *Semidefinida positiva* si $X^tAX \geq 0, \forall X \in \mathbb{R}^n$ y no es definida positiva.
- *Semidefinida negativa* si $X^tAX \leq 0, \forall X \in \mathbb{R}^n$ y no es definida negativa.
- *Indefinida* en cualquier otro caso.

Caracterizaciones. Sea A una matriz simétrica y real. Definimos los menores principales de A

$$\Delta_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}.$$

- A es definida positiva $\Longleftrightarrow \Delta_i > 0,\ \forall i$.
- A es definida negativa $\Longleftrightarrow \Delta_i > 0,\ \forall i$ par y $\Delta_j < 0,\ \forall j$ impar.

3.3 Diagonalización por congruencias

Hemos visto que toda matriz simétrica real A es congruente con una matriz diagonal D, y que este proceso de diagonalización está relacionado con las bases A-conjugadas.

Para llevar a cabo este proceso de diagonalización por congruencias basta realizar operaciones elementales sobre A para obtener una matriz diagonal, de forma que, por cada operación elemental por filas se hace seguidamente la misma operación por columnas. La simetría de la matriz A implica que la matriz elemental asociada a la operación elemental por filas es la traspuesta de la matriz elemental asociada a la operación elemental por columnas. De modo que,

$$D = P_r^t \dots P_2^t P_1^t A P_1 P_2 \dots P_r = (P_1 P_2 \dots P_r)^t A (P_1 P_2 \dots P_r)$$

luego $D = P^t A P$ con $P = P_1 P_2 \dots P_r$ (matriz de cambio de base entre la base inicial y la base conjugada).

4 Factorización de Cholesky

Dada A matriz simétrica, real y definida positiva, su *factorización de Cholesky* consiste en la descomposición en la forma $A = \ell\, \ell^t$ con ℓ matriz triangular inferior y $\ell_{ii} > 0, \ \forall i$.

Nota. Como A es simétrica y definida positiva podemos realizar eliminación de Gauss sin intercambio de filas.

<u>Construcción de ℓ</u>

1. Diagonalizamos por congruencias la matriz A. Luego, existe una R regular tal que $RAR^t = D$, despejando $A = SDS^t$ con D diagonal.

   Nota. Como A es simétrica y definida positiva podemos realizar eliminación de Gauss sin intercambio de filas, y por tanto, S es una matriz triangular inferior.

2. Como D tiene los elementos positivos, existe una matriz B diagonal tal que $D = BB$ y se tiene $A = SBBS^t = (SB)(SB)^t = \ell\ell^t$.