Matrices y Sistemas Lineales

Natalia Boal
María Luisa Sein-Echaluce
Universidad de Zaragoza

1 Matrices sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$

1.1 Definición

Dado un conjunto K ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y dos conjuntos finitos de índices $I = \{1, \cdots, m\}$ $J = \{1, \cdots, n\}$, se llama *matriz de tamaño* $m \times n$ *sobre* K a la aplicación

$$\begin{array}{rccc} A: & I \times J & \longrightarrow & K \\ & (\, i\, ,\, j\,) & \mapsto & a_{ij} \end{array}$$

Si $n = m$, la matriz A se dice *matriz cuadrada* y los elementos a_{ii}, $1 \leq i \leq n$ son los *elementos diagonales de* A.

Notación:

1. Escribiremos $A = (a_{ij})_{m \times n}$.
2. $M_{m \times n}(K)$ denota el conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ sobre K.
3. $M_n(K)$ es el conjunto de matrices cuadradas de tamaño n sobre K.

1.2 Matrices especiales

Definición. Se dice *matriz fila* a toda matriz de tamaño $1 \times n$.

Definición. Se dice *matriz columna* a toda matriz de tamaño $m \times 1$.

Definición. $A \in M_n(K)$ se dice *matriz diagonal* si $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$.

Definición. $A \in M_{m \times n}(K)$ se dice *matriz triangular superior* si $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

Definición. $A \in M_{m \times n}(K)$ se dice *matriz triangular inferior* si $a_{ij} = 0$, si $i < j$.

Definición. $A \in M_n(K)$ se dice *matriz simétrica* si $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$.

Definición. $A \in M_n(K)$ se dice *matriz antisimétrica* si $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i \neq j$.

Definición. Se llama *matriz traspuesta de* $A \in M_{m \times n}(K)$ a otra matriz $B \in M_{n \times m}(K)$ tal que $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$. Se denota $B = A^t$ o A'.

Nota: Si $A \in M_n(K)$ es simétrica entonces $A^t = A$.

2 Operaciones con matrices

2.1 Suma de matrices

$$\begin{array}{rcl} (+) : M_{m\times n}(K) \times M_{m\times n}(K) & \longrightarrow & M_{m\times n}(K) \\ (\,A\,,\,B\,) & \mapsto & A+B \end{array}$$

Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ entonces $A + B \;=\; (a_{ij} + b_{ij})$.

Propiedades:

1. La suma de matrices es una operación interna en $M_{m\times n}(K)$.
2. Asociativa: $\forall A, B, C \,\in\, M_{m\times n}(K)$, $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. Conmutativa: $\forall A, B \,\in\, M_{m\times n}(K)$, $A + B = B + A$.
4. Existencia de elemento neutro: $\exists O \,\in\, M_{m\times n}(K)$ tal que $A + O \,=\, O + A \,=\, A$ $\forall A \,\in\, M_{m\times n}(K)$.

   Nota: $O = (o_{ij})$ con $o_{ij} = 0$, $\forall i, j$, se dice *matriz nula*.
5. Existencia de elemento opuesto: $\forall A \,\in\, M_{m\times n}(K)$ $\exists B \in M_{m\times n}(K)$ tal que $A + B = B + A = O$.

   Nota: $B = (b_{ij})$ con $b_{ij} = -a_{ij}$, $\forall i, j$, se dice *matriz opuesta*.

2.2 Producto por un escalar

$$\begin{array}{rcl} (\cdot_K) : K \times M_{m\times n}(K) & \longrightarrow & M_{m\times n}(K) \\ (\,\lambda\,,\,A\,) & \mapsto & \lambda A \end{array}$$

Si $A = (a_{ij})$ entonces $\lambda A \;=\; (\lambda a_{ij})$.

Propiedades:

1. Es una operación externa.
2. $(\lambda + \mu)A \;=\; \lambda A + \mu A \;\; \forall \lambda, \mu \,\in\, K$, $\forall A \,\in\, M_{m\times n}(K)$.
3. $\lambda(A + B) \;=\; \lambda A + \lambda B \;\; \forall \lambda \,\in\, K$, $\forall A,\, B \in\, M_{m\times n}(K)$.
4. $\lambda(\mu A) \;=\; (\lambda\mu)A \;\; \forall \lambda, \mu \,\in\, K$, $\forall A \,\in\, M_{m\times n}(K)$.
5. $1A \;=\; A$, $\forall A \,\in\, M_{m\times n}(K)$.

2.3 Producto de matrices

$$\begin{array}{rcl} (\cdot): M_{m\times n}(K)\times M_{n\times p}(K) & \longrightarrow & M_{m\times p}(K) \\ (\,A\,,\,B\,) & \mapsto & A\cdot B \end{array}$$

Si $A=(a_{ij})_{m\times n}$ y $B=(b_{ij})_{n\times p}$ entonces $C=A\cdot B=(c_{ij})_{m\times p}$ donde

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}\;=\;\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},$$

$1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq p.$

Propiedades:

1. Asociativa: $\forall A\in M_{m\times n}(K)$, $\forall B\in M_{n\times p}(K)$, $\forall C\in M_{p\times q}(K)$ se tiene $(AB)C=A(BC)$.
2. Distributiva: $\forall A,B\in M_{m\times n}(K)$ $\forall C\in M_{n\times p}(K)$ se tiene $(A+B)C\;=\;AC+BC$.
3. Distributiva: $\forall A\in M_{m\times n}(K)$, $\forall B,C\in M_{n\times p}(K)$ se tiene $A(B+C)\;=\;AB+AC$.
4. Existencia de elemento unidad: $\exists I_n\in M_n(K)$ tal que $AI_n\;=\;I_nA\;=\;A$, $\forall A\in M_n(K)$.

   Nota: I_n es la matriz diagonal de orden n con $1's$ en la diagonal y se dice *matriz identidad*.

Importante: El producto de matrices, en general, no es conmutativo.

Definición. Sean $A\in M_{m\times n}(K)$ y $B\in M_{n\times p}(K)$. A y B se dicen *divisores de cero* si $AB=O$ siendo $A\neq O$ y $B\neq O$.

Definición. Una matriz $A\in M_n(K)$ se dice *inversible* o *regular* si $\exists B\in M_n(K)$ tal que

$$AB\;=\;BA\;=\;I_n.$$

La matriz B se dice *inversa de* A y se denota por A^{-1}. La matrices no inversibles se dicen *singulares*.

2.4 Otras propiedades

- $A\in M_{m\times n}(K)$ $(A^t)^t\;=\;A$ (la trasposición es involutiva).
- $(A+B)^t\;=\;A^t+B^t$ con $A,B\in M_{m\times n}(K)$.
- $(\lambda A)^t\;=\;\lambda A^t$ con $\lambda\in K$, $A\in M_{m\times n}(K)$.
- $(AB)^t\;=\;B^tA^t$ con $A\in M_{m\times n}(K)$, $B\in M_{n\times p}(K)$.
- Si $A\in M_n(K)$ posee inversa ésta es única.
- Si $A,B\in M_n(K)$ son inversibles, entonces AB es inversible y $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
- Si $A\in M_n(K)$ es inversible, entonces A^t es inversible y $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

Definición. Se llama *grupo lineal general de orden* n y lo denotamos por $GL(n)$, al conjunto de matrices $A\in M_n(K)$ regulares.

3 Matrices elementales

Definición. Dada una matriz $A \in M_{m\times n}(K)$, se dice *operación elemental sobre las líneas (filas ó columnas) de* A a una de las siguientes operaciones:

- permutar líneas i y j de A,
- sumar a la línea i la línea j multiplicada por el escalar t,
- multiplicar la línea i por el escalar $s \neq 0$.

Definición. Se llaman *matrices elementales* a las matrices cuadradas que, multiplicadas a la izquierda (derecha) de una matriz A actuan realizando operaciones elementales sobre las filas (columnas) de A y que son de una de las tres formas siguientes:

- Matriz P_{ij} :

$$P_{ij} \; = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{fila}\, i \\ \\ \leftarrow \text{fila}\, j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

  - $P_{ij}A$: permuta la fila i de A por la fila j.
  - AP_{ij} : permuta la columna i de A por la columna j.

- $P_{ij}(t)$ con $t \in K$:

$$P_{ij}(t) \; = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \dots & t & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{lugar}\, (i,j) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

  - $P_{ij}(t)A$: a la fila i de A le suma la fila j multiplicada por t.
  - $AP_{ij}(t)$: a la columna j le suma la columna i multiplicada por t.

- $Q_i(s)$ con $s \in K \;\, s \neq 0$:

$$Q_i(s) \; = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & s & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{lugar}\, (i,i) \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

– $Q_i(s)A$: multiplica la fila i de A por s.
– $AQ_i(s)$: multiplica la columna i de A por s.

3.1 Propiedades

Las matrices elementales son inversibles y además

- $[P_{ij}]^{-1} = P_{ij}$.
- $[P_{ij}(t)]^{-1} = P_{ij}(-t)$.
- $[Q_i(s)]^{-1} = Q_i(s^{-1})$.

4 Rango de una matriz

Definición. Las *matrices* A y $B \in M_{m\times n}(K)$ se dicen *equivalentes* si $\exists P \in M_m(K)$ y $\exists Q \in M_n(K)$ regulares tal que $B = PAQ$.

Toda matriz $A \in M_{m\times n}(K)$ puede transformarse mediante operaciones elementales en filas y en columnas en una matriz de la forma

$$C_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right).$$

El número de filas (ó columnas)de C_r no idénticamente nulas se dice *rango de* C_r, por lo tanto es r.

Observaciones:

- Todas las matrices equivalentes tienen el mismo rango.
- Las matrices A y C_r son equivalentes, por tanto, la matriz A tiene rango r.
- La equivalencia de matrices es una relación de equivalencia, es decir, cumple las propiedades:
  – Reflexiva: $\forall A \in M_{m\times n}(K)$, A es equivalente a A.
  – Simétrica: Si A es equivalente a B entonces B es equivalente a A, para A, $B \in M_{m\times n}(K)$.
  – Transitiva: Si A es equivalente a B y B es equivalente a C entonces A es equivalente a C, para A, B, $C \in M_{m\times n}(K)$.

5 Cálculo del rango de una matriz

Definición. Una matriz $A \in M_{m\times n}(K)$ se dice *matriz escalonada* si

1. el primer elemento de cada fila no nulo es 1,
2. para todo par de filas consecutivas se tiene:
   (a) la segunda fila es nula ó
   (b) las dos son no nulas y el primer elemento no nulo de la segunda fila está a la derecha del primer elemento no nulo de la primera fila.

Para calcular el rango de una matriz A efectuamos operaciones elementales por filas y/o columnas para hallar otra matriz equivalente a A que sea escalonada. El número de filas (o columnas) no idénticamente nulas es el rango de A.

6 Cálculo de la inversa de una matriz

Recordad que, $A \in M_n(K)$ es inversible si $\exists | A^{-1} \in M_n(K)$ tal que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n.$$

Para calcular A^{-1}, efectuaremos operaciones elementales (sólo sobre filas ó sólo sobre columnas) en la matriz A hasta obtener la matriz identidad, esto es,

$$(A \,|\, I_n) \;\rightarrow\; \text{operaciones elementales} \;\rightarrow\; (I_n \,|\, A^{-1}).$$

7 Determinantes

Definición. Se llama *determinante* de una matriz $A \in M_n(K)$ a una aplicación de la forma

$$\begin{array}{rcl} \det : M_n(K) & \longrightarrow & K \\ A & \mapsto & \det(A) \end{array}$$

que verifique las propiedades siguientes:

1. $\det(a_1, \cdots, a'_i + a"_i, \cdots, a_n) = \det(a_1, \cdots, a'_i, \cdots, a_n) + \det(a_1, \cdots, a"_i, \cdots, a_n)$,
2. $\det(a_1, \cdots, \lambda a_i, \cdots, a_n) = \lambda \det(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$,
3. $\det(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots, a_n) = 0$ si $a_i = a_j$.
4. $\det(I_n) = 1$

donde a_i es la fila (o columna) $i-$ésima de la matriz A.

Notación. El determinante de A se puede denotar también como $|A|$.

Definición. El *cofactor* (i, j) viene dado por

$$C_{ij} \;=\; (-1)^{i+j}\det\left(A_{ij}\right)$$

donde A_{ij} es la matriz que resulta de suprimir la fila $i-$ésima y la columna $j-$ésima de la matriz A.

Desarrollo de un determinante: El determinante de una matriz cuadrada de orden n, se puede obtener como suma de los productos de los elementos de una de sus filas (o de una de sus columnas) por sus correspondientes cofactores, esto es, si desarrollamos por ejemplo por la fila i

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}.$$

7.1 Propiedades

Dada una matriz $A \in M_n(K)$, se tiene que:

1. Si todos los elementos de una fila (o columna) de A son 0 entonces $|A| = 0$.
2. Si A tiene una fila (o columna) proporcional a otra entonces $|A| = 0$.
3. $|AB| = |A||B|$, $A, B \in M_n(K)$.
4. Si multiplicamos por $\lambda \in K$ todos los elementos de una fila (o columna) de A entonces el determinante queda multiplicado por λ.
5. Si se permutan dos filas (o columnas) de A entre sí entonces el determinante de A cambia de signo.
6. Si a una fila (o columna) de A le sumamos otra fila (o columna) multiplicada por un escalar entonces el determinante no varía.
7. A regular si y sólo si $|A| \neq 0$.

8 Sistemas de ecuaciones lineales

Consideramos un *sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas* $x_1, \cdots, x_n$ de la forma

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 \,+\, a_{12}x_2 \,+\, \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 \,+\, a_{m2}x_2 \,+\, \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

siendo $a_{ij} \in K$ (*coeficientes*) , $b_i \in K$ (*términos independientes*). Si $b_i = 0$ para todo i, el sistema se dice *homogéneo.*

Es sistema podemos expresarlo matricialmente como

$$AX = b$$

siendo $X = (x_1, \cdots, x_n)^t \in K^n$ (*vector de incógnitas*), $b = (b_1, \cdots, b_m)^t \in K^m$ (*vector de términos independientes*) y $A \in M_{m\times n}(K)$ (*matriz de coeficientes*)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Se llama *matriz ampliada* a la matriz

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Definición. Una *solución* del sistema es una n-tupla $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ tal que sustituyendo x_i por λ_i se verifican las m igualdades del sistema.

- Un *sistema de ecuaciones* es *incompatible* si no posee solución.
- Un *sistema de ecuaciones* es *compatible* si posee solución. Además,
  - es *compatible determinado* si posee una única solución y
  - es *compatible indeterminado* si posee una familia de soluciones.

Observación: Todo sistema homogéneo es compatible pues existe, al menos, la solución nula.

8.1 Teorema de Rouché-Frobenius

Un sistema $AX = b$ de m ecuaciones lineals con n incógnitas y coeficientes en un cuerpo K es compatible si y sólo si $rang\, A = rang\,(A|b)$. Además, será compatible determinado si y sólo si $rang\, A = rang\,(A|b) = n$.

Propiedades. Dado un sistema $AX = b$ $A \in M_{m\times n}(K)$ y a partir del teorema de Rouché-Frobenius, se sigue la siguiente discusión:

- $rang\, A \neq rang\,(A|b) \Longrightarrow$ sistema incompatible,
- $rang\, A = rang\,(A|b) < n \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

Definición. Dos *sistemas* de ecuaciones lineales (con el mismo número de incógnitas) se dicen *equivalentes* si tienen las mismas soluciones.

Definición. Si P es una matriz regular, entonces el sistema $PAX = Pb$ es equivalente al sistema $AX = b$.

Definición. Un sistema de ecuaciones lineales se dice *escalonado* si su matriz de coeficientes es escalonada.

9 Resolución de sistemas lineales

9.1 Método de Cramer

Dado el sistema $AX = b$, con A regular, $b \in M_{n\times 1}(K)$, su solución viene dada por

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},\ i = 1, \cdots, n$$

donde A_i es la matriz resultante de sustituir la columna $i-$ésima de A por el vector b.

9.2 Método de Gauss

Consiste en transformar un sistema $AX = b$ dado, en un sistema equivalente (con las mismas soluciones) cuya matriz de coeficientes es escalonada, de esta forma la resolución es inmediata. Para esto, basta con realizar operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada $(A|b)$ del sistema.

Observaciones:

- El método de Gauss puede fallar si alguno de los pivotes del proceso es nulo. En muchos casos esto puede evitarse permutando filas en ese momento y continuar la triangulación.
- El coste computacional del método de Gauss es menor que el coste del método de Cramer.

10 Factorización LU de una matriz

Toda matriz A regular (salvo permutaciones en las filas) puede expresarse en la forma $A = LU$ donde L es una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal y U una matriz triangular superior.

Teorema. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ tal que las n submatrices diagonales

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n$$

son inversibles. Entonces, existe un única matriz $L \in M_n(K)$ triangular inferior con $l_{ii} = 1,\ i = 1, \cdots, n$ y existe un única $U \in M_n(K)$ matriz triangular superior tal que $A = LU$.

10.1 Construcción de la factorización LU

Supongamos que A verifica las condiciones anteriores y que realizamos operaciones elementales sobre ella hasta obtener una matriz triangular superior U. Sean $E_1, \cdots, E_k$ las matrices elementales tales que

$$E_k \cdots E_1 A = U,$$

entonces

$$A = (E_k \cdots E_1)^{-1} U,$$

por tanto

$$L = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}.$$

Si en el proceso de triangulación anterior sólo hemos utilizado matrices del tipo $P_{ij}(t)$ con $i > j$, la matriz L es una matriz triangular inferior con $1's$ en la diagonal, por ser producto de matrices triangulares inferiores con $1's$ en la diagonal.

Observaciones:

1. La factorización LU de una matriz es la interpretación matricial del método de Gauss.

2. Si A es inversible y al aplicar el método de Gauss es necesario realizar alguna permutación de filas (por tener pivote nulo) la matriz no puede factorizarse en la forma LU. Sin embargo, es posible reordenar las filas de A (encontrar una matriz de permutación P) tal que la matriz reordenada (PA) si admita factorización LU.

10.2 Resolución de sistemas aplicando la factorización LU

Dado un sistema de ecuaciones lineales $AX = b$, si A es una matriz que admite factorización LU, el sistema puede expresarse en la forma

$$LUX = b.$$

Por tanto, la resolución del sistema se reduce a la resolución de dos sistemas cuyas matrices de coeficientes son triangulares

$$\begin{aligned} LY &= b, \\ UX &= Y \end{aligned}$$

(en ese orden).