Tema 2. Los números complejos

1. Calcula el número complejo resultado de cada una de las siguientes operaciones: $(3-2i)\cdot(1+3i)$, i^{23}, $i^{2n}+i^{-2n}$, $i^{2n}-i^{-2n}$.

2. Halla los números complejos z que tienen parte real igual a 1 y que cumplen: $z\bar{z}-z-\bar{z}=3$.

3. Efectúa las siguientes operaciones con números complejos y dibuja los complejos resultantes:
$$\frac{-5+5i}{4-3i}, \qquad (-1+2i)^2\left(\frac{4}{1-i}+\frac{2-i}{1+i}\right), \qquad \frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}+i^{16}}.$$

4. Determina a y b para que se verifique: $\dfrac{7+i}{3+4i}=\dfrac{a+bi}{4-i}$.

5. Calcula los números complejos $\pm\sqrt{-5-12i}$ usando la forma binómica,

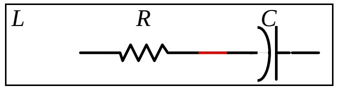
6. Calcula las soluciones reales y complejas de las siguientes ecuaciones polinómicas, y expresa cada uno de los polinomios como producto de factores simples complejos y como producto de factores simples reales:
   (i) $5z^2+2z+10=0$, (ii) $z^2+(-3+2i)z+5-i=0$,
   (iv) $z^4+3z^2+1=0$, (vi) $z^3-2z-4=0$.

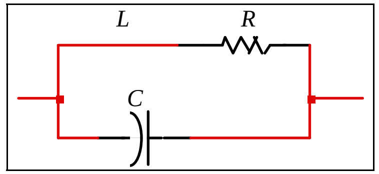
7. Explica el significado geométrico de las siguientes relaciones y traza las gráficas de los puntos z que las verifican:
   a) $|z-z_1|=|z-z_2|$, donde z_1 y z_2 son fijos; b) $|z-(2-3i))|<1$;
   c) $1\le|z|\le 4$; d) $|z-2|+|z+2|=10$; e) $|z-3|-|z+3|=3$.

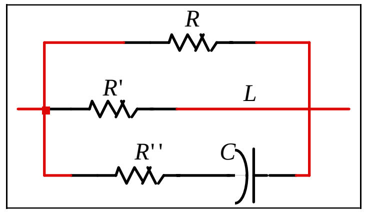
8. Calcula el módulo y un argumento de los números complejos: $v=-1$, $z=3+3i$, $w=-1+\sqrt{3}\,i$. Dibújalos y señala en el gráfico el módulo y el argumento calculados. Exprésalos en las formas polar y trigonométrica.

9. Calcula el producto, $z_1\cdot z_2$, y el cociente, $\dfrac{z_1}{z_2}$, de los siguientes números complejos:
   a) $z_1=1_{2\pi/3}=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ y $z_2=1_{\pi/6}=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$.
   b) $z_1=10_\pi=10(\cos\pi+i\sin\pi)$ y $z_2=5_{3\pi/4}=5\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.
   Explica cómo se pueden obtener geométricamente los resultados. ¿Cuál es la forma binómica de los números complejos calculados?

10. Consideremos un circuito con resistencia R, inductancia L y capacidad C recorrido por una corriente alterna de frecuencia ω. Cada una de ellas aporta una impedancia R, $iL\omega$ y $\dfrac{1}{iC\omega}$, respectivamente. Las leyes de la electricidad afirman que las impedancias se suman para elementos en serie y se suman los recíprocos para elementos en paralelo.
   — Determinar la impedancia de los tres circuitos de la figura.
   — Calcular el módulo y el argumento de la impedancia del primero.







11. Suponemos que w es un número complejo.
   — ¿Cuál es el complejo z si $z+w$ es el trasladado de w tres unidades en la dirección noroeste?

M. Dolores Lerís -- Zenaida Uriz

— ¿Cuál es el complejo z para que $z \cdot w$ sea el obtenido al girar w un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes en sentido positivo?

— ¿Cuál es el complejo z sabiendo que $\frac{w}{z}$ es el punto de coordenadas $(1,1)$?

12. Calcula el módulo y el argumento del número complejo $z = \left(1+\sqrt{3}\, i\right)^8$.

13. Expresa en forma binómica, totalmente simplificada, la suma $1+\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^{28}}$.

14. Calcula todos los números complejos resultado de las siguientes raíces: $\sqrt[3]{-i}$, $\sqrt[8]{i}$, $\sqrt[5]{1}$, $\sqrt[6]{-64}$, $\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)^{21/4}$.

15. Escribe en forma exponencial los siguientes números complejos: 1, -1, i, $1+\sqrt{3}\, i$, $5\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{9}\right)$.

16. Realiza el cálculo de las siguientes operaciones usando la forma exponencial de los números complejos: $e^{\pi i}\cdot 2e^{i\pi/4}$, $\frac{(1+i)^7}{\left(1-\sqrt{3}\, i\right)^{10}}$, $\sqrt[4]{1}$.

17. Escribe los números complejos 1, $\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ en forma exponencial y calcula su producto.

18. Calcula el módulo y el argumento del complejo $3e^{i\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)}+4e^{i\,2t}$, donde t significa tiempo, y escríbelo en forma trigonométrica. Si la parte imaginaria de este complejo es una intensidad, halla su frecuencia angular, el periodo y su desfase angular.

19. Los números complejos c_n y c_{-n} satisfacen la relación $a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)=c_n e^{inx}+c_{-n}e^{-inx}$, donde a_n, b_n y x son números reales y n es cero o natural. Expresar c_n y c_{-n} en función de a_n y b_n. ¿Qué relación hay entre c_n y c_{-n}?

20. Representa gráficamente el conjunto de números complejos $E=\left\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}$. Utilizando un razonamiento geométrico, representa también los conjuntos $e^{i\frac{\pi}{4}}E+1$ y $(1+i)E+1$.

21. Calcula las soluciones reales y complejas de las siguientes ecuaciones polinómicas, y expresa cada uno de los polinomios como producto de factores simples complejos y como producto de factores simples reales:
   (i) $z^4+16=0$, (ii) $z^6-2z^3+2=0$,
   (iii) $\left(z^2-z+1\right)^2=-1$, (iv) $(z-2)^4+81=0$.

22. Descomponer en suma de fracciones simples reales los siguientes cocientes de polinomios:
   (i) $\frac{1}{x(x+1)\left(x^2-4\right)}$, (ii) $\frac{s^2+3s-4}{s^2-3s+8}$, (iii) $\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}$,
   (iv) $\frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}$, (v) $\frac{1}{s^4-1}$, (vi) $\frac{x^2+2}{x^4+x^3-3x^2-5x-2}$,
   (vii) $\frac{s}{s^3-s^2+s-1}$, (viii) $\frac{2x^2+x+1}{x^4+2x^2+1}$.