Tema 4. Resolución de sistemas lineales: eliminación gaussiana

1. Resuelve el siguiente sistema triangular: $\begin{cases} u+v+w=b_1 \\ \quad v+w=b_2 \\ \qquad w=b_3 \end{cases}$. Probar que la solución proporciona los coeficientes de la combinación lineal de las columnas de la izquierda que da lugar a la columna de la derecha.

2. Calcula dos puntos de la recta intersección de los siguientes tres hiperplanos del espacio cuatridimensional: $\begin{cases} t=0 \\ z=0 \\ x+y+z+t=1 \end{cases}$.

3. Encontrar la intersección de los tres hiperplanos del espacio cuatridimensional: $u+v+w+z=6$, $u+w+z=4$ y $u+w=2$. ¿Esa intersección es una recta, es un punto o es el conjunto vacio? ¿Cuál es la intersección si añadimos el cuarto hiperplano: $u=-1$?

4. Considera el siguiente sistema: $\begin{cases} u+v+w=2 \\ u+2v+3w=1 \\ \quad v+2w=0 \end{cases}$

   a) Explica la incompatibilidad del sistema encontrando una combinación lineal de las tres ecuaciones que dé lugar a $0=1$.
   b) ¿Qué valor debería reemplazar al 0 de la última ecuación para que el sistema tuviera solución?, ¿cuál es una de esas soluciones?
   c) Considera ahora la representación por columnas del sistema, es decir, la ecuación vectorial $u\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\mathbf{b}$; demuestra que las tres columnas de la izquierda son vectores que están en el mismo plano (para ello expresa la tercera columna como una combinación de las dos primeras), ¿cuáles son las soluciones (u,v,w) si $\mathbf{b}=\mathbf{0}$?

5. Resuelve por eliminación gaussiana el sistema lineal $\begin{cases} x-y=0 \\ 3x+6y=18 \end{cases}$. Dibuja en el plano cada una de las rectas del sistema anterior y del sistema resultante tras la eliminación. Dibuja la solución por columnas.

6. Calcula las soluciones de los siguientes sistemas mediante el método de eliminación de Gauss. Indica cuáles son los pivotes y si el sistema es singular o no.

   (a) $\begin{cases} 2u-3v=3 \\ 4u-5v+w=7 \\ 2u-v-3w=5 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 2u-v=0 \\ -u+2v-w=0 \\ -v+2w-z=0 \\ -w+2z=5 \end{cases}$;

   (c) $\begin{cases} v-w=0 \\ u-v=0 \\ u-w=0 \end{cases}$, $\begin{cases} v-w=1 \\ u-v=1 \\ u-w=1 \end{cases}$, $\begin{cases} v-w=2 \\ u-v=2 \\ u-w=4 \end{cases}$.

7. Usa la eliminación gaussiana para reducir los siguientes sistemas a una forma escalonada, encuentra las soluciones de los sistemas e indica los pivotes:

   (a) $\begin{cases} x+y-2z+4t=5 \\ 2x+2y-3z+t=3 \\ 3x+3y-4z-2t=1 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x+2y-3z+4t=2 \\ 2x+5y-2z+t=1 \\ 5x+12y-7z+6t=7 \end{cases}$;

   (c) $\begin{cases} u+2v+2w=0 \\ 2u+4v+5w=0 \end{cases}$, $\begin{cases} u+2v+2w=1 \\ 2u+4v+5w=4 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ ax+by=0 \end{cases}$.

8. Determina si los cinco planos definidos por las siguientes ecuaciones pasan por el mismo punto: $-x+z=-2$, $2x-y+z=1$, $-3x+2y-2z=-1$, $x-2y+3z=-2$ y $5x+2y+6z=-1$.

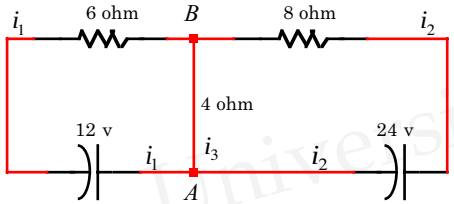
9. Comprueba que el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$ tiene soluciones no triviales; elige una de esas soluciones no triviales y expresa el sistema en forma vectorial. Si añadimos la tercera ecuación lineal $2x+y=0$, ¿cuales son las soluciones del sistema lineal $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$?

M. Dolores Lerís -- Zenaida Uriz

Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Universidad de Zaragoza, España

Indica otra tercera ecuación lineal que al añadirla al sistema inicial produzca un sistema lineal con infinitas soluciones.

10. Recuerda que las intensidades y los cambios de voltaje de la corriente en un circuito satisfacen las *leyes de Kirchhoff*:
— Ley de intensidades de Kirchoff: *la suma algebraica de todas las corrientes en cualquier nodo es cero.*
— Ley de voltaje de Kirchhoff: *la suma algebraica de todos los cambios de voltaje en cualquier circuito cerrado es cero.*
Además, la *ley de Ohm* establece que *al pasar una corriente por una resistencia* R *se produce una caída de voltaje* v *proporcional a la intensidad* i*, es decir,* $v = Ri$.
Utiliza estas leyes para calcular las intensidades i_1, i_2 e i_3 del siguiente circuito:



11. Supongamos que una economía simple tiene tres industrias, digamos A, B y C, que están interrelacionadas y no dependen de las demás.

Producción

Consumo

	A	B	C
A	7/16	3/6	3/16
B	5/16	1/6	5/16
C	4/16	2/6	8/16

La relación entre ellas viene dada en el cuadro de producción y consumo de al lado, que significa, por ejemplo, que la industria C usa 4/16 del total de producción de A.

Determina los ingresos de cada industria considerando la condición de equilibrio *«gastos de consumo = ingresos de producción».*

Fundación de Matemáticos de la Ingeniería
Universidad de Zaragoza, España