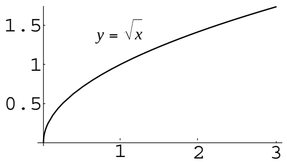
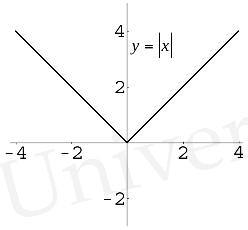
Tema 5. Las funciones reales de una variable real

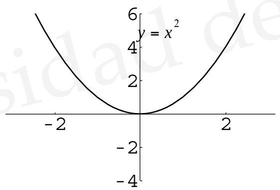
1. Calcula el dominio de cada una de las siguientes funciones:

$$y=\frac{1}{x-|x|},\qquad y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2},\qquad y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{2+x}},$$
$$y=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\qquad y=\frac{1}{\ln(1-x)}.$$

2. Indica en los siguientes casos hacia dónde y cuánto hay que trasladar la gráfica conocida para obtener la gráfica que se pide.
   — Conocida la gráfica de $y=\sqrt{x}$, dibuja $f(x)=\sqrt{x-2}$.
   — Conocida la gráfica de $y=|x|$, representa $f(x)=|x|-2$.
   — Conocida la gráfica de $y=x^2$, representa $y=(x-2)^2-4$.







3. Si $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ y $g(x)=\sqrt{1-x^2}$, calcula las salidas o imágenes que se piden a continuación:
   — $(f+g)(0)$ y, en general, $(f+g)(x)$.
   — $(f\cdot g)(0)$ y, en general, $(f\cdot g)(x)$.
   — $\left(\dfrac{g}{f}\right)(t)$.
   — $(f\circ g)(-1)$ y, en general, $(f\circ g)(x)$.
   — $(g\circ f)(0)$ y, en general, $(g\circ f)(x)$.

4. Si $f(x)=x^2$, $g(x)=2^x$ y $h(x)=\operatorname{sen}x$, calcula $(f\circ g)(0)$, $(g\circ f)(1)$, $(f\circ g\circ h)\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. Determina si alguna de las siguientes funciones es par o impar:
$$f(x)=\frac{x}{x^2-1},\qquad g(w)=\sqrt{w-1},\qquad h(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

6. La función $y=2x+3$ tiene por gráfica una línea recta creciente. ¿Cuál es su función inversa?, ¿es también creciente?

7. Calcula la función inversa de cada una de las siguientes funciones:
$$y=g(x)=\frac{2x-1}{3-x},\qquad y=\operatorname{Ch}x=\frac{e^{2x}+1}{2e^x},\qquad y=\operatorname{Sh}x=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}.$$

8. El movimiento dado por $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\operatorname{sen}t\end{cases}$ es un giro sobre la circunferencia de radio 1, en el sentido contrario de las agujas del reloj, que comienza en el punto $x=1$ e $y=0$, y va a una velocidad de 1 radian/seg.
   Repite frases análogas a ésta, es decir, da el mismo tipo de información para los siguientes movimientos:
$$\begin{cases}x=\cos 3t\\ y=-\operatorname{sen}3t\end{cases},\qquad \begin{cases}x=5\operatorname{sen}2t\\ y=5\cos 2t\end{cases},$$
$$\begin{cases}x=1+\cos t\\ y=\operatorname{sen}t\end{cases},\qquad \begin{cases}x=\cos(t+1)\\ y=\operatorname{sen}(t+1)\end{cases}.$$

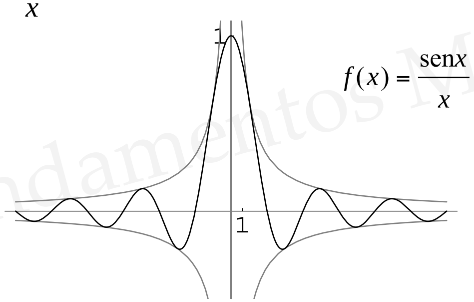
9. Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\max\{\operatorname{sen}x,0\}$. ¿Es periódica?

10. Determina el periodo de las funciones:
$$y=\operatorname{sen}(x+\alpha),\qquad y=K\operatorname{sen}x,$$
$$y=f(t)=K\operatorname{sen}(\omega t+\alpha),$$
$$f(x)=\tan x+\cos 2x,\qquad g(x)=\tan\frac{\pi}{4}(x+2).$$

11. Repasa el concepto y el cálculo de límites de funciones. Aplícalo a los siguientes ejemplos:
$$\lim_{x\to 0}x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x},\qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-6x}{x^3+1},\qquad \lim_{t\to 2}\frac{t+3}{t^2-4},\qquad \lim_{x\to 5}\frac{x^2+25}{x-5},$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1},\qquad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{6+x}},\qquad \lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}.$$

12. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$,



calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}2x}{x+\operatorname{sen}3x},\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 h\cdot\cos^2 h}{h^2}.$$

13. Recuerda la siguiente regla de cálculo de límites: *cuando* $x\to+\infty$ *o cuando* $x\to-\infty$, *el cociente de polinomios* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *tiene el mismo límite que el cociente de sus términos directores*.
Aplícala para calcular:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(3x^3-2x^2+6\right),\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3-2x^2+6}{2x+6},$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3-2x^2+6}{2x^3+6},\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3-2x^2+6}{x^4+2x-1}.$$

14. Calcula los siguientes límites en el infinito:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{2x+1},\qquad \lim_{x\to-\infty}e^x,\qquad \lim_{t\to+\infty}e^{-2t}\operatorname{sen}t,\qquad \lim_{t\to+\infty}e^{3t}\operatorname{sen}5t.$$

15. La función $m(v)=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ describe la variación de la masa m de una partícula lanzada a gran velocidad v, siendo c la velocidad de la luz. Halla $\lim\limits_{v\to c^-}m(v)$.

16. Calcula el valor «correcto» de $f(0)$ para que cada una de las siguientes funciones sean continuas en $x=0$:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}\qquad \text{y}\qquad f(x)=\frac{1}{x}.$$

17. Usa el Teorema de Bolzano para probar que algún número entre -2 y -1 es solución de la ecuación polinómica $x^3-x+3=0$.

18. Comprueba que la ecuación $x^5+x+1=0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[-1,0]$.

19. Comprueba que si f es una función continua en el intervalo $[0,1]$ y $0\le f(x)\le 1$, para todo $x\in[0,1]$, entonces existe al menos un punto $c\in[0,1]$ verificando $f(c)=c$.[1]
(Pista: Aplica el Teorema de Bolzano a la función $x-f(x)$).

20. ¿Toma la función $f(x)=\frac{x^3}{4}-\operatorname{sen}\pi x+3$ el valor $\frac{3}{2}$ en el intervalo $[-2,2]$?

21. Comprueba que la función $f(x)=e^{-x^2}$ alcanza máximo y mínimo en el intervalo $[-1,1]$ y determina estos valores óptimos.

1 Propiedad del punto fijo.