

Tema 6. La derivada de una función de una variable

1. Un punto P se mueve a lo largo de una recta de tal modo que su posición viene dada por $s(t) = 3t^2 - 2t$, a los t minutos. Determina la velocidad en el instante $t = 0$ y en el instante $t = 1$ y responde a las siguientes preguntas:

— ¿en qué intervalos de tiempo P se aleja del origen?
— ¿en qué intervalo de tiempo P se acerca al origen?
— ¿en qué instante la velocidad es nula?

2. Calcula la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en el punto indicado:

(1) $y = x^2$, en el punto (a, a^2) . (2) $y = \frac{1}{x}$, en el punto $(\frac{1}{2}, 2)$.

¿Cual es la ecuación de la recta normal en cada uno de los casos?

3. Halla las derivadas de las siguientes funciones aplicando las reglas elementales de derivación:

$$y = 5x^{2/3} - 3x^{5/2} + \frac{2}{x^3},$$

$$y = 3 \cos x + 2 \operatorname{sen} x,$$

$$y = (2x^2 + x) \cdot \ln x,$$

$$y = \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{xe^x}.$$

4. Halla los puntos de la gráfica de $y = f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ en los que la pendiente de la recta tangente es 0 y en los que es -1 .

5. Determina los números reales a y b para que la recta $2x - y = 0$ sea tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + ax + b$ en el punto $(2, 4)$.

6. Hallar los ángulos bajo los que se cortan las líneas siguientes:

— la recta $y = 4 - x$ y la parábola $y = 4 - \frac{x^2}{2}$;

— las sinusoides $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ en el intervalo $(0, \pi/2)$.

7. Un negocio prospera de tal modo que sus ganancias (acumuladas) tras t años es $1000 t^2$ euros.

— ¿Cuales fueron las ganancias durante el tercer año?

— ¿Cual fue la velocidad media de las ganancias durante la primera mitad del tercer año?

— ¿Cual fue la velocidad instantánea de las ganancias en $t = 2$ años?

8. Halla la derivada $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones aplicando la regla de la cadena:

(1) $y = \ln|x|$, (2) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, (3) $y = \ln(\tan x)$,

(4) $y = \tan^2 x$, (5) $y = \tan(x^2)$, (6) $y = \operatorname{Sh}^2 x + \operatorname{Ch} x^3$.

9. Supongamos que f es una función derivable, hallar las derivadas de las siguientes funciones:

(1) $y = f(x^2 + 1)$, (2) $y = f^2(x) + 1$, (3) $y = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$,

(4) $y = \frac{f(x)-1}{f(x)+1}$, (5) $y = f(\sqrt{x^2 + 1})$.

10. Cada una de las siguientes ecuaciones define implícitamente a la variable y como función de la variable x , $y = f(x)$. Calcula la derivada $y' = f'(x)$.

(1) $x^2 + y^2 = 4$ (ecuación de una circunferencia),

(2) $y^4 - xy^3 + x^3y - 16 = 0$.

11. Una escalera de 2 metros está apoyada contra la pared. Si el pie de la escalera es arrastrado a lo largo del pavimento alejándose de la pared a 0'2 m/seg, ¿a qué velocidad baja el alto de la escalera por la pared, cuando el pie de la escalera está a 0'4 metros de la pared?

12. Está entrando líquido en un depósito cilíndrico vertical, de 6 metros de radio, a una velocidad de 8 m³/min. ¿A qué velocidad sube el nivel?

13. Un avión que vuela a una altitud de 4.000 metros, pasa directamente por encima de un observador, que está quieto. El piloto observa que, medio minuto más tarde, el avión ha recorrido 5 km y que la velocidad del avión es 600 km/h, ¿a qué velocidad aumenta su distancia del observador?