Tema 7. Aplicaciones de la derivada

1. El radio r de un círculo se incrementa desde 2 cm hasta $2'02$ cm. Evalúa el incremento que se produce en el área, así como la aproximación lineal de este incremento.

2. Calcula la parte lineal del cambio del volumen de un cubo cuando:
a) sus lados cambian de 10 a $10'1$;
b) sus lados cambian de x a $x+\Delta x$.

3. Explica las siguientes aproximaciones:
— $\log 1'01 \approx 0'01$, — $\sqrt{4'02} \approx 2+\frac{1}{4}0'02 = 2'005$,
— $\frac{1}{105} \approx \frac{1}{100} - \frac{1}{100^2}5 = 0'0995$.

4. Al aplicar una corriente continua de V_0 voltios a un circuito RL que parte del reposo, la intensidad i del circuito en el instante t viene dada por $i(t) = \frac{V_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. Calcula una fórmula aproximada a la anterior, válida para valores del tiempo t cercanos a 0.

5. Calcula los valores máximo y mínimo absolutos de las siguientes funciones: $y=\sqrt[3]{x^2}$ cuando $x\in[-1,2]$ e $y=\frac{1}{1+x^2}$ cuando $x\in[-2,2]$.

6. Calcula la aproximación lineal de la función $f(x)=\operatorname{sen}x$ para valores de x cercanos al 0. ¿Cuál es la expresión exacta que da el Teorema del valor medio (de Lagrange)?

7. (Sobre el Teorema de Rolle) Supongamos que $f'(c)=0$, ¿hay obligatoriamente dos puntos con la misma imagen: $f(a)=f(b)$?

8. Si $\left|\frac{df}{dx}\right| \le 1$ en todos los puntos, comprueba que es cierto:
$$|f(x)-f(y)| \le |x-y|,$$
para todos los valores x e y.
¿Podrías poner un ejemplo de una función con las condiciones anteriores?

9. Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones:
a) $f(x)=x^2e^{-x}$, b) $g(x)=2x^2-\log x$,
c) $f(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$, d) $f(x)=\cos x - x$,
e) $f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$, f) $g(x)=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$.

10. Halla los valores óptimos o extremos, locales y globales, de las funciones:
a) $f(x)=4x^3-21x^2+18x+20$, b) $f(x)=2\operatorname{sen}x+\cos 2x$,
c) $g(x)=\sqrt{e^{x^2}-1}$, d) $h(x)=\frac{1}{2x^4-x+1}$.

11. Los días de junio y de diciembre son los más largos y los más cortos del año, respectivamente. ¿Por qué, durante esos días, la variación del tiempo de iluminación solar es muy pequeña?

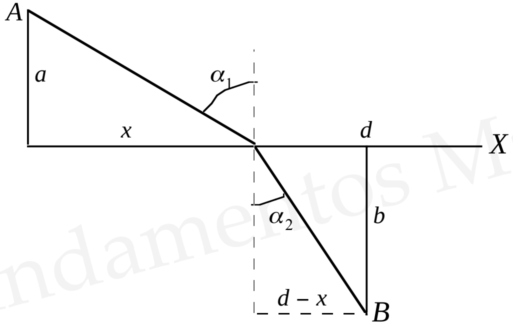
12. Se corta un alambre de 4 metros de longitud en dos trozos. Un trozo forma un círculo de radio r y el otro forma un cuadrado de lado x. Calcula el valor de r que hace mínima la suma de las áreas del círculo y del cuadrado. Además, calcula r para que dicha suma sea máxima.

13. Se va a construir un puente sobre un río, de 30 metros de anchura, y va a ser sostenido en cada orilla del río por un pilar de 4 metros de altura, ¿dónde debería colocarse el pie del puente para que su longitud total sea mínima?

14. ¿Cuál es el punto de la parábola $y=x^2$ más próximo al $(0,2)$?
(Estos problemas de minimizar distancias son los modelos de muchas aplicaciones)

15. Supongamos que se desconoce el valor exacto de cierta magnitud x. Se toma su medida experimentalmente y se han obtenido las n mediciones que llamamos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se adopta como valor más probable de x el que minimice $S(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(x-x_i\right)^2$ (la suma de los cuadrados de los errores).
Halla el valor más probable de x.

16. El *Principio de Fermat* en Óptica dice que la luz viaja de un punto A a otro punto B a lo largo del camino que requiera menos tiempo. Supongamos que la luz viaja a una velocidad v_1 en el medio donde está A, encima del eje X, y a una velocidad v_2 en el medio en el que está B, debajo del eje X.



— Calcula el tiempo $T(x)$ que tarda la luz en viajar de A a B.
— ¿Qué ecuación verifica el punto x que minimiza el tiempo $T(x)$?
— Deduce la Ley de Snell: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2}$.

17. Una lata de cerveza tiene una capacidad de 330 cm^3, ¿cuales son sus dimensiones si el material empleado en su fabricación ha sido mínimo?

18. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles dado?

19. Cuando se hace un orificio en la pared de un depósito cilíndrico lleno de agua, el chorro resultante da en el suelo a una distancia de x metros de la base. Esta distancia x depende de la altura y a la que se encuentra el orificio del siguiente modo: $x(y) = 2\sqrt{y(h-y)}$, donde h es la altura del cilindro.
¿En qué punto debe hacerse el orificio para que el chorro alcance la máxima distancia a la base?, ¿cuál es esta máxima distancia?

20. Los cursos de dos ríos tienen la forma de la parábola $y = x^2$ y de la recta $x - y - 2 = 0$. ¿Qué puntos de cada río deberá unir el canal recto de mínima longitud que conecta ambos ríos?
Ayuda: la distancia de un punto (a,b) a la recta $Ax + By + C = 0$ se calcula mediante $d = \dfrac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

21. Calcula las derivadas sucesivas de:
a) $f(x) = x^3$, b) $f(x) = \operatorname{sen} x$, c) $f(x) = \begin{cases} 1 + x + \dfrac{x^2}{2}, & \text{si } x < 0 \\ e^x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

22. Localiza los puntos de inflexión y los intervalos donde son cóncavas hacia arriba o hacia abajo las funciones:
a) $f(x) = x + x^2 - x^3$, b) $g(x) = x + \cos x$,
c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, d) $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

23. Construye la aproximación lineal y la cuadrática de las siguientes funciones en el punto $x = 0$:
a) $y = \operatorname{sen} x + \cos x$, b) $y = \sqrt{1+x}$, c) $y = \dfrac{1}{1-x}$, d) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

24. ¿Por qué la aproximación lineal $\operatorname{sen} x \approx x$ es también la aproximación cuadrática?
Para responder, conviene observar qué tipo de punto es $x = 0$

25. Calcula los siguientes límites:

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$, $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x - \sqrt{x}}$,

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \tan x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$,

$\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x - 3\operatorname{sen} x + x\cos x}{x^5}$, $\displaystyle\lim_{x\to 1} (1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$,

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{cotan} x}{x}\right)$, $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right)$, $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \left(\frac{\pi}{x} - 1\right)^{\tan x}$,

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x^2+x+5}\right)^{1/(1+\log x)}$