

Tema 8. Técnicas del cálculo de primitivas

En todos los ejercicios se propone calcular integrales indefinidas. Salvo en las muy sencillas, se escriben las soluciones y se pide que sean comprobadas.

1. Integrales casi inmediatas:

$$\int (4 - x^{2/3})^3 dx, \quad \int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx, \quad \int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3} dx,$$

$$\int \left(\frac{\sqrt{x}}{x} - 3x\sqrt[3]{x} + 7 \right) dx, \quad \int \frac{1}{3x-7} dx, \quad \int e^{x^2+4x+5}(x+2)dx,$$

$$\int \sin^2 nx dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4n} \sin 2nx + C, \quad \int \cos^2 nx dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4n} \sin 2nx + C$$

2. Usa el método de integración por partes en las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \arcsen x dx = x \cdot \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + C,$
 b) $\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C,$
 c) $\int \arctan \frac{a}{x} dx = x \arctan \frac{a}{x} + \frac{a}{2} \log(a^2 + x^2) + C,$
 d) $\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{16} x^4 (4 \ln x - 1) + C,$ e) $\int x e^{2x} dx = \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + C,$
 f) $\int x \cdot \sen x dx = -x \cos x + \sen x + C,$
 g) $\int (3x^2 - 2x - 7) \cos x dx = (3x^2 - 2x - 13) \sen x + (6x - 2) \cos x + C,$
 h) $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) e^x + C.$

3. Usa la técnica del cambio de variable en las siguientes integrales irracionales lineales:

a) $\int \frac{x+1+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} dx = x + 6\sqrt{x} + 8 \ln|\sqrt{x}-1| + C,$
 b) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} - x + 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) + C,$

c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x}} dx = \frac{2}{15} \sqrt{2+x} [3x^2 - 8x + 32] + C.$

4. Usa la técnica del cambio de variable en las siguientes integrales de funciones combinación de exponenciales:

a) $\int \frac{e^x - 2e^{2x}}{1 - e^x} dx = 2e^x + \ln|e^x - 1| + C,$
 b) $\int \frac{a^x}{9a^{2x} + 4} dx = \frac{1}{6 \ln a} \arctan \frac{3a^x}{2} + C,$
 c) $\int \frac{1}{Shx + 2Chx} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}e^x) + C.$

5. Usa la técnica de integración de funciones racionales para calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C,$
 b) $\int \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} dx = x + 4 \ln|x-4| + \ln|x+2| + C,$
 c) $\int \frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 4 \frac{1}{x-1} + C,$
 d) $\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + 2 \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + C,$
 e) $\int \frac{x^4 - 1}{x^3 - 4x^2 + x + 6} dx = \frac{x^2}{2} + 4x - 5 \ln|x-2| + 20 \ln|x-3| + C,$
 f) $\int \frac{x^4}{(1-x)^3} dx = -\frac{x^2}{2} - 3x - 6 \ln|1-x| - \frac{4}{1-x} - \frac{7}{2(1-x)^2} + C,$
 g) $\int \frac{1}{(x^2 - 1)^2} dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + C,$
 h) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx = \ln[\sqrt{x} + \sqrt{x+1}] + \sqrt{x(x+1)} + C.$

6. Calcula las primitivas de las siguientes funciones:

$$a) \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C,$$

$$b) \int \frac{1}{x^4 - 1} dx = -\frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \arctan x + C,$$

$$c) \int \frac{1}{(x^2 + 1)(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \arctan x + C,$$

$$d) \int \frac{1}{x^3 + x} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C,$$

$$e) \int \frac{1}{(x^2 + 1)(x-1)^2} dx = -\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + C,$$

$$f) \int \frac{3x-2}{x^2+2x+2} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+2) - 5 \arctan(x+1) + C,$$

$$g) \int \frac{2x+1}{x^2+4x+8} dx = \ln(x^2+4x+8) - \frac{3}{2} \arctan \frac{x+2}{2} + C,$$

$$h) \int \frac{1 + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx = 3\sqrt[3]{x} + \ln x - 6 \ln(\sqrt[3]{x} + 1) + 6 \arctan \sqrt[6]{x} + C.$$

7. Calcúlese las primitivas que se apuntan a continuación.

$$a) \int \frac{1}{1 + \cos x} dx = \tan \frac{x}{2} + C,$$

$$b) \int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x} dx = \ln \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right| + C,$$

$$c) \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C,$$

$$d) \int \operatorname{sen}^3 x dx = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C,$$

$$e) \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2 + \cos x} dx = \frac{1}{2} \cos^2 x - 2 \cos x + 3 \ln(2 + \cos x) + C,$$

$$f) \int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x} dx = -\frac{1}{3 \operatorname{sen}^3 x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x} + C,$$

$$g) \int \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \ln|\operatorname{sen} x| - 2 \operatorname{sen}^2 x + C,$$

$$h) \int \frac{1}{2 + 3 \tan x} dx = \frac{3}{13} \ln|3 \operatorname{sen} x + 2 \cos x| + \frac{2}{13} x + C,$$

$$i) \int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx = -\frac{1}{2} \ln|\operatorname{sen} x + \cos x| + \frac{1}{2} x + C,$$

$$j) \int \frac{2 \tan x + 3}{\operatorname{sen}^2 x + 2 \cos^2 x} dx = \ln(\tan^2 x + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + C,$$

$$k) \int \cos^4 x \cdot \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + C.$$

8. Calcula o comprueba el resultado de las siguientes integrales indefinidas, que tienen por integrando una función irracional cuadrática.

$$a) \int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx \quad b) \int \frac{2}{\sqrt{1-(2x+3)^2}} dx = \operatorname{arcsen}(2x+3) + C,$$

$$c) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-16}} dx, \quad d) \int \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}} dx = \frac{1}{2} \ln \left| 2x + \sqrt{4x^2-1} \right| + C,$$

$$e) \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-1}} dx = \ln \left| x+1 + \sqrt{(x+1)^2-1} \right| + C,$$

$$f) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+16}} dx, \quad g) \int \frac{1}{\sqrt{(x+5)^2+4}} dx = \ln \left(x+5 + \sqrt{(x+5)^2+4} \right) + C,$$

$$h) \int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+x+1}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arcsin} \frac{4x-1}{3} + C,$$

$$i) \int \sqrt{-x^2+2x+1} dx = \operatorname{arcsin} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{2} \sqrt{-x^2+2x+1} + C,$$

$$j) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx = \ln \left(x-1 + \sqrt{x^2-2x+5} \right) + C,$$

9. En Electricidad se necesita saber las primitivas de ciertas funciones que contienen potencias del binomio $x^2 + a^2$. Son las escritas a continuación, calcula sus primitivas.

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \quad \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \quad \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx \quad \int \frac{x^3}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx$$

Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Universidad de Zaragoza, España