Tema 9. La integral simple de Riemann

1. Calcular las siguientes integrales con ayuda de las fórmulas del área de las figuras planas (triángulos, círculos, etc.):
   a) $\int_1^2 (2x+1)dx$, b) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$.

2. Calcula las siguientes integrales mediante la regla de Barrow:
   a) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$, b) $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2-1}\,dx$,
   c) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x dx$, d) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3}dx$.

3. Calcula el área de cada uno de los siguientes recintos planos limitados por:
   a) el eje de abscisas y una semionda de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$.
   b) las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, y las curvas $y = 2^x$ e $y = 2x - x^2$.
   c) las parábolas $x = -2y^2$ y $x = 1 - 3y^2$.

4. ¿Es cierto que el área bajo la gráfica de $y = x - 1$, hasta el eje de abscisas, en $[0,3]$ es el número $\int_0^3 (x-1)dx$?

5. Calcula las siguientes integrales: $\int_{-1}^{2} \frac{|x|}{x}\,dx$, $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$.
   ¿Qué propiedad de la integral de Riemann has necesitado aplicar?

6. Calcula el área de la región plana limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y = \frac{x^2}{2}$, y por la recta $y = 2x$.

7. Usa la integración por partes para calcular $\int_0^{\pi} (x \cdot \operatorname{sen} x)dx$.

8. Realiza el cambio de variable adecuado para calcular cada una de las siguientes integrales:
   a) $\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$, b) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$, c) $\int_0^{\pi/2} \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}dx$.

9. Calcula el área del segmento del círculo, centrado en el origen O y de radio 2, situado a la derecha de la recta vertical $x = \sqrt{2}$.

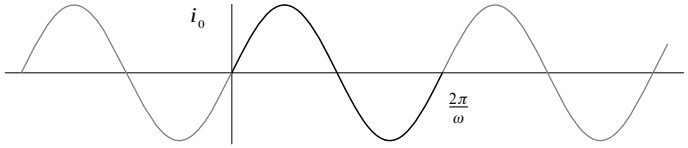
10. Calcula las integrales $\int_{-1}^{1} x^2 dx$, $\int_{-3}^{3} xe^{-x^2}\,dx$, $\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sin} x\,dx$, $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x\,dx$, $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ y $\int_{-\pi/3}^{5\pi} \max\{\sin x, 0\}dx$ aplicando las propiedades de la integral de funciones simétricas y de funciones periódicas.

11. ¿Por qué es correcta la igualdad: $\int_{-99}^{99} (ax^3 + bx^2 + cx)dx = 2\int_0^{99} bx^2 dx$?

12. ¿Cuál es el valor medio de la función $f(x) = x$ en el intervalo $[-1,1]$? ¿Y el de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-1,1]$?

13. Calcula el área bajo al curva $y = \operatorname{sen}^2 x$, hasta el eje de abscisas, entre $x = 0$ y $x = \pi$. ¿Cuál es el valor medio de esta función en el intervalo $[0,\pi]$?

14. Considera una corriente alterna de intensidad $i(t) = i_0 \operatorname{sen} \omega t$.



   a) Calcula la intensidad media en un semiciclo y en un ciclo.
   b) Calcula la intensidad eficaz en un ciclo, sabiendo que la intensidad eficaz es el valor medio cuadrático de la intensidad: $I_{ef} = \left[\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt\right]^{1/2}$

Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Universidad de Zaragoza, España

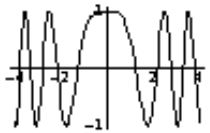
c) Si la corriente $i(t)$ pasa a través de un circuito de resistencia R, entonces la energía disipada, en forma de calor, en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es $W = R\int_{t_1}^{t_2} i^2(t)dt$. Comprueba que la intensidad eficaz I_{ef}, antes calculada, es la intensidad de una corriente continua que disipa en un ciclo la misma energía que la alterna $i(t) = i_0 \text{sen}\omega t$.

15. Calcula la derivada de las siguientes integrales cuyo extremo superior de integración es variable:

$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$;

$h(x) = \int_{-1}^{x} U(t)dt$, donde $U(t)$ es la función salto unitario;

$v(x) = \int_a^{2x} \cos t^2 dt$.



$y = \cos t^2$

Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería
Universidad de Zaragoza, España