

Tema 10. La integral impropia o integral generalizada

1. Calcula las siguientes integrales impropias (en ellas el intervalo de integración no es acotado):

$$(i) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx, \quad (ii) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx, \quad (iii) \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x dx,$$

$$(iv) \int_0^{+\infty} x \operatorname{sen} x dx, \quad (v) \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx, \quad (vi) \int_{-\infty}^0 e^x dx,$$

$$(vii) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx, \quad (viii) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

2. Halla el área comprendida entre la curva $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ y su asíntota horizontal.

3. Halla el área del recinto plano limitado por el eje de abscisas positivo y la curva $y = x^2 e^{-x}$.

4. El trabajo para llevar un satélite de masa m infinitamente lejos de la Tierra es $W = \int_R^{+\infty} \frac{GMm}{x^2} dx$, donde R es el radio de la esfera terrestre y M su masa. Calcula ese trabajo W .

5. El número de crías de un cierto pez después de t años está dado por $N(t) = 1000 e^{-0.2t}$. Calcula el periodo medio de vida, E , de cada animal mediante $E = -\frac{1}{1000} \int_0^{+\infty} t \cdot N'(t) dt$.

6. Calcula las siguientes integrales:

$$(i) \int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx, \quad (ii) \int_{-2}^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$$(iii) \int_{-1}^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (iv) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx.$$

7. Para pequeñas oscilaciones, el período de un péndulo de longitud L

está dado por $T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{x_0} \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} dx$. Calcula este período T .