

Tema 11. Matrices

1. Efectúa los siguientes productos de matriz por vector:

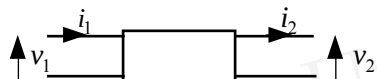
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2i & 1+i \\ -3 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

2. Calcula AB y BA , siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

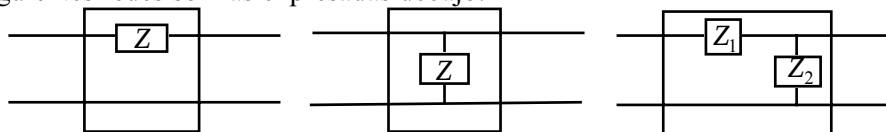
3. Calcula las potencias A^2 , A^3 , B^2 , B^3 , C^2 y C^3 , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4. Considera una red con cuatro polos (cuadripolo). Hay dos terminales o polos de entrada de una corriente de intensidad i_1 con una diferencia de potencial v_1 y el otro par de terminales de salida de una corriente i_2 y diferencia de potencial v_2



El potencial e intensidad de entrada se expresan en función del potencial e intensidad de salida mediante $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = T \bar{u}_2$, donde T se llama *matriz de transmisión*. Comprueba que la matriz de transmisión de las siguientes redes son las expresadas debajo:



$$T_{\text{serie}} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{\text{paralelo}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{\text{mixto}} = T_s T_p = \begin{pmatrix} 1+Z_1/Z_2 & Z_1 \\ 1/Z_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Considera la matriz $G = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Calcula G^2 y G^3 , ¿puedes proponer una fórmula para G^n ?

6. La primera fila de AB es una combinación lineal de todas las filas de B . En esta combinación, ¿cuáles son los coeficientes y cuál es la primera fila de

$$AB \text{ si } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

7. ¿Es verdadera alguna de las siguientes afirmaciones?
 a) Si la primera y la tercera columnas de B son iguales, también lo son la primera y la tercera columnas de AB .
 b) Si la primera y la tercera filas de B son iguales, también lo son la primera y la tercera filas de AB .
 c) Si la primera y la tercera filas de A son iguales, también lo son la primera y la tercera filas de AB .

8. Explica por qué las matrices cuadradas de orden n verifican, en general:

$$\begin{aligned} \text{a) } (AB)^2 &\neq A^2 B^2; & \text{b) } (A \pm B)^2 &\neq A^2 \pm 2AB + B^2; \\ \text{c) } A^2 - B^2 &\neq (A+B)(A-B). \end{aligned}$$

9. ¿Qué le sucede a una matriz A de tamaño 3×3 si la premultiplicamos por

$$E_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ o por } E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

¿Qué sucede si postmultiplicamos para formar AE_{31} ?

10. Considera la matriz $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula E^2 , E^8 y, en general, E^n .

¿Cuál es la «inversa» de E ?

11. ¿Qué le sucede a una matriz A de tamaño 2×2 si la premultiplicamos por $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?, ¿y si postmultiplicamos para formar AD ? ¿Cuál es la «inversa» de D ?

12. Considera las matrices de permutación $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Qué acción realizan sobre una matriz A las multiplicaciones PA y AP ?, ¿y la multiplicaciones QA y AQ ?
 ¿Cuáles son las «inversas» de estas matrices permutación P y Q ?

13. Usa la eliminación gaussiana para encontrar la matriz escalonada U de las

matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Resuelve además los sistemas: (a) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 8x + 7y = 1 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 2u - 3v = 3 \\ 4u - 5v + w = 7 \\ 2u - v - 3w = 0 \end{cases}$

14. Calcula la matriz U asociada a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Indica un

conjunto de variables libres (parámetros) y otro de variables básicas para el sistema $Ax = 0$, ¿cuáles son las soluciones?

15. Resuelve por eliminación gaussiana, realizando los cambios de fila que sean necesarios, los siguientes sistemas:

(a) $\begin{cases} v + w = 1 \\ u + v = 2 \\ u + w = 3 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} u + 4v + 2w = -2 \\ -2u - 8v + 3w = 32 \\ v + w = 1 \end{cases}$

16. ¿Cuáles son los valores de a y b que conducen a intercambio de filas y cuáles son los que hacen la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}$ singular?

17. Usa el método de Gauss-Jordan para hallar las inversas de las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

18. Encontrar las inversas de las matrices

a) Diagonales: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

b) Triangulares: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

c) Sabiendo que la inversa de la matriz $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es $F^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, siempre que $ad-bc \neq 0$, calcula la inversa de $G = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$.

19. Comprueba que si una matriz S es simétrica, entonces su cuadrado S^2 también es una matriz simétrica.

20. Averigua si es verdad que las matrices $A \cdot A^t$ y $A^t \cdot A$ son siempre simétricas (sea o no cuadrada la matriz A).

21. Suponiendo que A es una matriz cuadrada, en general, no es cierta la igualdad $AA^t = A^t A$.

Demuestra que las matrices simétricas y las matrices antisimétricas sí que verifican la igualdad $AA^t = A^t A$.

Averigua si la verifican o no las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.