

Tema 12. Espacios vectoriales y sistemas lineales

- ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}^2$ son subespacios vectoriales?
 - La recta de ecuación $ax+by+c=0$, donde a , b y c son constantes.
 - La unión del primer y tercer cuadrante.
 - El eje OY.
 - El exterior del círculo $x^2+y^2 \leq 1$.
- ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}^3$ son subespacios vectoriales?
 - El plano de vectores con primera componente nula, $x=0$.
 - El plano de vectores con primera componente igual a uno, $x=1$.
 - Todas las combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{u}=(1,1,0)$ y $\mathbf{v}=(2,0,1)$
 - Los vectores (a,b,c) que cumplen $c-b+3a=0$.
- ¿Qué propiedades de la derivación es necesario aplicar para establecer que el conjunto de las funciones derivables en un punto forman un espacio vectorial?
Lo mismo para las funciones integrables.
- Describe con lenguaje geométrico el subespacio generado por los vectores de las filas de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. ¿Cuál es el subespacio generado por sus columnas?
- ¿Cuál es el menor subespacio del espacio de las matrices cuadradas de orden 3 que contiene todas las matrices simétricas y todas las triangulares inferiores? ¿Cuál es el mayor subespacio contenido en ambos?
- Comprueba que el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ está en el espacio generado por los vectores de las columnas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Escribe ese vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de las columnas de A de dos formas distintas, al menos.
- ¿Cuáles son las filas linealmente independientes de la matriz escalonada $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? Lo mismo sobre las columnas.

Sabiendo que la matriz U procede de aplicar la eliminación gaussiana a la

matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 11 & 14 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, ¿es cierto que las columnas de A que ocupan el mismo lugar que las columnas independientes de U son también independientes?

- Probar que si cualquier elemento de la diagonal de la matriz triangular superior $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ es cero, entonces las filas son linealmente dependientes.
- Decidir la dependencia o independencia lineal de los vectores:
 - $(1,1,2)$, $(1,2,1)$ y $(3,1,1)$;
 - $(1,1,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,1)$ y (x,y,z) .
- En el espacio vectorial de las funciones reales con dominio $\mathbf{R}$, averigua si son linealmente independientes cada uno de los siguientes sistemas:

$$\mathcal{H} = \{f_1(x) = e^x, f_2(x) = xe^x, f_3(x) = x^2e^x\};$$

$$\mathcal{G} = \{g_1(x) = e^x \cos x, g_2(x) = e^x \sin x\}.$$
- Los vectores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ son linealmente independientes, ¿lo son también los vectores $\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}\}$?
- Consideramos la matriz escalonada $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - Indicar una base del espacio generado por las columnas de U .
 - Expresar cada columna que no está en la base como una combinación lineal de las columnas básicas.
 - Encontrar también una base para el espacio generado por las filas de U ¿coincide con el espacio columna?

13. El conjunto $\mathcal{P}_n$, de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes reales, es un espacio vectorial real que tiene dimensión $n+1$.
- a) *Interpolación lineal*. Comprueba que $\{1, x-a\}$ es una base de $\mathcal{P}_1$, cualquiera que sea el número real a . Expresa en dicha base la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ de la gráfica de la función f .
- b) *Interpolación cuadrática* o interpolación de orden dos: Comprobar que $\{1, x-a, (x-a)(x-b)\}$ es una base de $\mathcal{P}_2$. Expresa en esa base la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ y $(c, f(c))$ de la gráfica de la función f .
- c) *Polinomios de interpolación de Taylor (de grado dos)*: Comprobar que $\{1, x-a, (x-a)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2$. Expresa en esa base la ecuación del polinomio de grado dos que coincide con la función f en a y cuyas dos primeras derivadas en a también coinciden con las de f .

14. Encontrar un contraejemplo para la siguiente afirmación: «Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ es una base de $\mathbf{R}^4$ y W es un subespacio, entonces algún subconjunto de los vectores $\mathbf{u}$ forma una base de W ».

15. Consideremos en $\mathbf{R}^2$ la base canónica o estándar $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ y la base

$$\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}, \mathbf{v} = \frac{-\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}} \right\}.$$
 Se pide:

- a) Representálas gráficamente e indica el movimiento del plano que lleva la primera a la segunda.
- b) Razona que efectivamente $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es una base de $\mathbf{R}^2$.
- c) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\mathbf{w} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ respecto de la base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$?
16. Se considera en el espacio la base usual $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ y denotamos por (x, y, z) las coordenadas de un vector respecto de esta base.

Obtener la ecuación de la recta de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$ si se

toma como nueva base $\{\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{i}\}$.

17. Reduce, mediante la eliminación gaussiana, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -8 & 5 & -1 & 14 \end{pmatrix}$$
 a una forma escalonada U .

- a) Calcula el espacio nulo de U . ¿Cuál es el espacio nulo de A ?

- b) Expresa de dos forma distintas las soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

como la suma de una particular y de la solución general del sistema homogéneo asociado

18. Averigua la dimensión del espacio nulo de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ y determina una base del mismo.

Construye una base e indica la dimensión del espacio columna de A

Describe el conjunto de vectores $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ que hacen compatible el sistema

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Decide cuáles de los siguientes sistemas son compatibles, sin

calcular las soluciones: $\begin{cases} y + 4z = 3 \\ 2y + 8z = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} y + 4z = 3 \\ 2y + 8z = 5 \end{cases}$ y $\begin{cases} y + 4z = 0 \\ 2y + 8z = 0 \end{cases}$.

19. Construir una base e indicar la dimensión de los subespacios fundamentales

asociados a cada una de las matrices: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Indica, sin resolverlo, si el sistema $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + z = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ cuya matriz ampliada es B

tiene soluciones.

21. Hallar la dimensión y una base del subespacio de $\mathbf{R}^4$ generado por los vectores:

$$\mathbf{v}_1 = (2, 1, 4, 4), \quad \mathbf{v}_2 = (-1, 3, -4, 3), \quad \mathbf{v}_3 = (4, 2, -3, 3) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_4 = (6, 4, 2, 4)$$

22. Completa el sistema $\{\mathbf{u} = (1, 1, 1), \mathbf{v} = (1, 2, 3)\}$ de vectores linealmente independientes hasta conseguir una base de $\mathbf{R}^3$.

23. Demostrar que si el producto de dos matrices es la matriz nula, $AB = 0$, entonces el espacio columna de B está contenido en el espacio nulo de A .

24. Estudiar para qué valores de a y b , el sistema
$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ ax + 2y + bz = 4 \\ ax + by + az = 4 \end{cases}$$

a) tiene solución única (compatible determinado);

b) tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado);

c) no tiene solución (incompatible)

Resolverlo para $a = 0.6$ y $b = 0.5$