Tema 13. Ortogonalidad. Espacios euclídeos

1. Considera el espacio vectorial de las funciones periódicas de período 2π y continuas en el intervalo $(-\pi,\pi)$

   a) Comprueba que $f\cdot g=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx$ es un producto escalar.

   b) Calcula el producto escalar de las funciones que valen $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$ cuando $x\in(-\pi,\pi)$, ¿cuál es la norma o longitud de cada una de ellas?

   Si ahora consideramos el espacio vectorial de las funciones periódicas de período T y continuas en el intervalo $\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$, define en él un producto escalar análogo al anterior.

2. En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$, demuestra que la longitud de $A\mathbf{u}$ es igual a la longitud de $A^t\mathbf{u}$ si $AA^t=A^tA$.

3. ¿Qué parejas de vectores ortogonales entre sí hay entre los siguientes vectores: $\mathbf{u}=(1,2,2,-1)$, $\mathbf{v}=(4,0,4,0)$ y $\mathbf{w}=(1,-1,-1,-1)$?

4. Calcula dos vectores de $\mathbf{R}^3$ linealmente independientes que sean perpendiculares a $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$.

5. Encuentra un vector ortogonal al espacio fila y un vector ortogonal al espacio columna de $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&3\\3&6&4\end{pmatrix}$.

6. Calcula todos los vectores perpendiculares a $(1,4,4,1)$ y $(2,9,8,2)$

7. Considera los vectores del plano $\mathbf{u}=(2,5)$ y $\mathbf{v}=(4,-1)$.
   a) Calcula el coseno del ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.
   b) ¿Cuál es el ángulo entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{i}$?
   c) Calcula un vector unitario ortogonal a $\mathbf{u}$.

8. Considera la base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ formada por los vectores:

   $$\mathbf{u}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right),\quad \mathbf{v}=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)\text{ y }\mathbf{w}=\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right).$$

   Escribe el vector $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ (trata de usar dos métodos distintos).

9. En el espacio de la funciones periódicas, de período 2π, y continuas a trozos con el producto escalar $f\cdot g=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx$, se pide:

   a) Comprueba que $\mathcal{S}=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x\}$ es un sistema ortogonal, ¿es también ortonormal?

   b) Dibuja la extensión periódica de $E(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\in(-\pi,0)\\ V, & \text{si } x\in[0,\pi]\end{cases}$.

   c) Averigua los coeficientes de Fourier de la función del apartado anterior respecto al sistema ortogonal $\mathcal{S}$.

10. Encuentra una tercera columna de modo que la matriz $Q=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&?\\1/\sqrt{3}&0&?\\1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&?\end{pmatrix}$ sea ortogonal, ¿cuánta libertad hay para elegir esa tercera columna?
    Verifica que las filas también son ortonormales.

11. Considera el sistema lineal $\begin{cases}-\frac{3}{\sqrt{14}}x+\frac{1}{\sqrt{6}}y-\frac{2}{\sqrt{21}}z=1\\ \frac{2}{\sqrt{14}}x+\frac{2}{\sqrt{6}}y-\frac{1}{\sqrt{21}}z=2\\ -\frac{1}{\sqrt{14}}x+\frac{1}{\sqrt{6}}y+\frac{4}{\sqrt{21}}z=3\end{cases}$.
    a) Comprueba que la matriz de coeficientes es ortogonal.
    b) Resuelve el sistema.

12. Demuestra que toda matriz ortogonal de orden 2 es necesariamente de la forma $G=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\ \sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$, siendo α un número real, o de la forma $S=\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}$ con $a^2+b^2=1$.

13. Considera los vectores del plano $\mathbf{u}=(2,5)$ y $\mathbf{v}=(4,-1)$. Calcula la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$.

14. Determina la proyección ortogonal de $\mathbf{u}=(1,1,1)$ sobre $\mathbf{v}=(2,2,0)$.

15. Sea $\mathbf{F}=(1,1,1)$ un vector fuerza que mueve una masa puntual a lo largo de la recta $r:\begin{cases} x=0t \\ y=1t \\ z=2t \end{cases}$, donde $t\in\mathbf{R}$. Calcular la proyección de $\mathbf{F}$ sobre r.

16. Proyecta el vector $\vec{b}=(0,3,0)$ sobre cada uno de los vectores

$$\mathbf{a}_1=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right),\quad \mathbf{a}_2=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)\ \text{y}\ \mathbf{a}_3=\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

a) ¿Cuál es la proyección de $\vec{b}$ sobre el plano generado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$?
b) ¿Cuál es la suma de las tres proyecciones unidimensionales?
c) ¿Por qué $P=\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1^t+\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2^t+\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3^t$ es igual a la identidad?

17. El sistema lineal $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y=0 \\ \frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y=0 \\ -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=1 \end{cases}$, de más ecuaciones que incógnitas, es incompatible. Si denotamos mediante A la matriz de coeficientes, matriz de tamaño 3×2, se pide:
a) ¿cuál es la proyección del vector de términos independientes sobre el espacio columna de A?
b) ¿cuáles son los mejores valores que podríamos asignar a x e y? (mejores en el sentido de que minimicen la distancia del término independiente al espacio columna de A).
c) calcula $AA^t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

18. Recuerda que en el espacio de la funciones periódicas, de período 2π, y continuas a trozos con el producto escalar $f\cdot g=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$, el sistema $\mathcal{S}=\{1,\cos t,\sin t,\cos 2t,\sin 2t\}$ es un sistema ortogonal.

Para las funciones $I(t)=\begin{cases} 0, & \text{si } -\pi<t<0 \\ V, & \text{si } 0\le t<\pi \end{cases}$ e $I(t)=t,\ t\in(-\pi,\pi]$, se pide:
a) ¿Cuál es la norma de $I(t)$?
b) Calcula el trabajo realizado por la corriente de intensidad $I(t)$ al pasar por una resistencia R: $W=R\int_{-\pi}^{\pi}[I(t)]^2\,dt$, y compáralo con la norma obtenida en el apartado a).
c) Calcula el polinomio trigonométrico

$$s_2(t)=a_0+a_1\cos t+b_1\sin t+a_2\cos 2t+b_2\sin 2t$$

que más se aproxima a $I(t)$.
d) Averigua el trabajo realizado por la parte constante, por el primer armónico y por el segundo, ¿cuál es el trabajo realizado por $s_2(t)$?

19. ¿Qué múltiplo de $\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ debemos restar de $\mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ para obtener un vector ortogonal a $\mathbf{a}_1$?

20. Aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a los vectores $\mathbf{a}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ y $\mathbf{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

21. Encuentra una base ortonormal del subespacio generado por

$$\mathbf{a}_1=(1,-1,0,0),\quad \mathbf{a}_2=(0,1,-1,0)\ \text{y}\ \mathbf{a}_3=(0,0,1,-1).$$

22. Construir en cada uno de los siguientes casos las proyecciones ortogonales del vector $\mathbf{b}$ sobre el subespacio generado por los vectores del sistema $\mathcal{S}$:
a) $\mathbf{b}=(1,0,1)$ y $\mathcal{S}=\{(1,1,1),(0,1,3)\}$;
b) $\mathbf{b}=(10,10,20,20)$ y $\mathcal{S}=\{(2,1,0,0),\ (0,0,0,3),\ (4,2,2,-6)\}$.