Tema 14. Campos escalares. Vector gradiente

1. Expresa analítica y geométricamente el dominio de los siguientes campos escalares. Estudia cuáles están acotados en su dominio. Busca, si existen, los puntos cuya imagen son los valores máximo y mínimo de cada campo.

   1) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 2) $f(x,y)=\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}$,

   3) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}$, 4) $f(x,y)=\ln(xy)$,

   5) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, 6) $f(x,y)=\arcsin(x+y)$,

   7) $f(x,y,z)=e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}$, 8) $f(x,y,z)=\dfrac{x+y+z}{|x+y+z|}$,

   9) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 10) $f(x,y,z)=\cos(x+y+z)$.

2. Dibuja, en cada caso, las curvas de nivel para los valores de K dados:

   1) $f(x,y)=x^2+y^2$, $K=0,1,4,8$.

   2) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $K=1,4,9$.

   3) $f(x,y)=xy$, $K=-1,0,1,4$.

3. Dibuja las curvas de nivel que pasan por cada uno de los puntos indicados:

   1) $f(x,y)=x^2-y$, $(0,1)$, $(-2,2)$ y $(1,3)$.

   2) $f(x,y)=\cos(x+y)$, $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $(-2,2)$ y $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4. Dibuja, para los distintos valores de K, las superficies equipotenciales de los siguientes campos escalares:

   1) $f(x,y,z)=e^{x+y+z}$, $K=1,e,\dfrac{1}{e^2}$.

   2) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $K=0,1,4$.

   3) $f(x,y,z)=x^2-y-z$, $K=0,2$.

5. Dibuja las superficies equipotenciales del campo $f(x,y,z)=\dfrac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ que pasan por los puntos $(1,0,1)$ y $(3,-3,2)$.

6. Calcula, en cada caso, el campo compuesto $g\circ f$ y evalúalo en el punto indicado:

   1) $f(x,y)=3x^2-4y$, $g(t)=\dfrac{t^2-1}{t}$ en $(x,y)=(1,1)$.

   2) $f(x,y)=\sin x+\cos y$, $g(z)=z^2$.

   3) $\vec{f}(t)=(4\cos t,4\sin t)$, $g(x,y)=x^2+y^2$ en $t=\dfrac{\pi}{6}$.

   4) $\vec{f}(t)=(1+t,1-t)$, $g(x,y)=9-\left(x^2+y^2\right)$ en $t=\sqrt{2}$.

   5) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $g(r)=\dfrac{c}{r}$ en $(x,y,z)=(-1,1,2)$.

7. Calcula los límites que se indican a continuación:

   1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

   3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{(\cos x-1)(y-2)}{x^2\left(y^2-4\right)}$, 4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,5)}\frac{\tan(xy)}{x}$,

   5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, 6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$,

   7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{3-x-y}{3+x-2y}$,

   9) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{3x^2+xy^2-3xy-y^3}{x^2-y^2}$, 10) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

M. Dolores Lerís -- Zenaida Uriz

8. Si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L$, calcula $\lim\limits_{(y,y)\to(0,0)} f(y,y)$.

9. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

3) $f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{x^2+1}{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

4) $f(x,t)=e^{-3t}\cos(x+t)$.

10. Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones, indicando en qué puntos están definidas:

1) $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$, 2) $f(x,y)=\ln(x+y)$,

3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\wedge 3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

4) $f(x,y,z)=\dfrac{x^2-z^2}{y^2+z^2}$, 5) $f(x,y,t)=e^{-2\pi t}\cos 4x\sin 6y$.

11. Calcula en cada caso, la ecuación de la recta tangente a la curva C, intersección de la superficie S y el plano Π, en el punto P indicado:

a) S:(paraboloide) $z=x^2+y^2$, $\Pi: x=2$, en $P(2,1,5)$.

b) S:(semiesfera) $z=\sqrt{36-\left(x^2+y^2\right)}$, $\Pi: y=4$, en $P(2,4,4)$.

12. La temperatura en cada punto de una placa está dada por $T(x,y)=xy(x-2)(y-3)$. Calcula, en el punto $(1,2)$, la velocidad de cambio en la dirección del eje OX y en la dirección del eje OY.

13. Para las funciones siguientes, calcula las derivadas parciales segundas y halla su valor en el punto P indicado:

1) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$, $P(2,3)$. 2) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{xy}$, $P(2,1)$.

3) $f(x,y,z)=xyz$, $P(1,1,1)$. 4) $f(x,y,z)=e^{3xy+2yz+xz}$, $P(0,0,0)$.

14. Utiliza un resultado sobre la igualdad de las derivadas cruzadas para simplificar el cálculo de

1) $\dfrac{\partial^5\left(x\sin y+e^y\right)}{\partial x^3\,\partial y^2}$, 2) $\dfrac{\partial^5\left(\sin xy+x^3y\right)}{\partial x^2\partial y^3}$.

15. Halla r y k para que $T(x,t)=e^{rt}\sin\omega x$ satisfaga la ecuación del calor unidimensional, $\dfrac{\partial T}{\partial t}=c^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ con las condiciones de contorno $T(0,t)=0$ y $T(l,t)=0$. ¿Cómo se comporta T para valores grandes del tiempo t $(t\to+\infty)$?

16. Sabiendo que la ecuación de ondas unidimensional es $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, averigua si los siguientes campos escalares la verifican:

1) $w_1(x,t)=A\sin(x+ct)$, 2) $w_2(x,t)=B\cos(x+ct)$,

3) $w_1(x,t)+w_2(x,t)$, 4) $w(x,t)=\ln(2x+2ct)$.

17. La ecuación tridimensional de Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ la satisfacen los potenciales gravitatorios y electrostáticos, así como las distribuciones de calor en estado estacionario. Indica cuáles de los siguientes campos la cumplen:

1) $U(x,y,z)=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

2) $U(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$,

3) $u(x,y)=a\ln\left(x^2+y^2\right)+b$.

18. Estudia en qué puntos son diferenciables y calcula el vector gradiente de los siguientes campos escalares en los puntos indicados:
    1) $u(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ en $(0,0)$, en $(1,0)$ y en $(1,1)$.
    2) $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ en $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ y en $(1,1)$.
    3) $U(x,y,z)=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ en $(1,1,0)$ y en $(1,1,1)$.
    4) $U(x,y,z)=\dfrac{xy^2}{z^3}$ en $(1,2,3)$.

19. De acuerdo con la ley de los gases ideales, la presión P, la temperatura T y el volumen V de un gas cumplen la ecuación $PV=kT$, donde k es una constante. Calcula la velocidad de cambio de la presión con respecto a la temperatura cuando ésta es 310° Kelvin, si el volumen se conserva fijo a 10 m^3.
    Para estos valores $(V,T)=(10,310)$, determina la dirección para la que es máxima la variación de presión.

20. La altitud de una colina sobre un punto (x,y) de la base está dada por $z(x,y)=25-(4x^2+y^2)$
    a) ¿Cuál es el contorno de la base?
    b) Dibuja la curva de nivel que pasa por el punto $(x,y)=(1,1)$ y el vector gradiente en ese punto.
    c) ¿En qué dirección comenzará a descender una corriente que mana en el punto $(x,y,z)=(1,1,20)$? Proyecta esa dirección sobre el plano XY.

21. El potencial entre dos cilindros concéntricos es $V(x,y)=110+30\ln(x^2+y^2)$ voltios. ¿Cuál es la dirección de la fuerza eléctrica (el gradiente) en el punto $(x,y)=(2,5)$?

22. Sea $U(x,y,z)=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ el potencial electrostático. Probar que, en cada punto $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, U aumenta o disminuye más rapidamente a lo largo de una recta que pasa por el origen.

23. En los casos siguientes, dibuja la curva o superficie equipotencial y el vector gradiente en el punto P indicado:
    1) $f(x,y)=-x^2+y^2$, $P(2,3)$.
    2) $f(x,y)=x-2y$, $P(6,1)$.
    3) $f(x,y)=x^2+y^2$, $P(-1,3)$.
    4) $f(x,y)=\dfrac{y-1}{\sin x}$, $P\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{2}\right)$.
    5) $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$, $P(1,1,3)$
    6) $f(x,y,z)=y+z$, $P(3,1,1)$.

24. Sea $z=f(x,y)=(x-1)y^2e^{xy}$.
    1) Halla su derivada direccional en $P(0,1)$ en la dirección hacia el punto $(-1,3)$.
    2) ¿Cuánto vale la derivada direccional máxima de f en P?
    3) Escribe el vector gradiente del campo f en P. Indica su significado geométrico.

25. Halla el vector gradiente del campo $f(x,y)=x^3+x^2y+y^3$ en el punto de coordenadas $(0,1)$. Indica las direcciones del plano en las que los valores de las derivadas direccionales en ese punto están comprendidas entre -2 y 2. ¿En qué dirección la variación del campo es nula?

26. Considera las direcciones del plano: $\mathbf{u}=\frac{3}{5}\mathbf{i}-\frac{4}{5}\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}=\frac{4}{5}\mathbf{i}-\frac{3}{5}\mathbf{j}$ y supongamos que el campo $f(x,y)$, diferenciable en cierto punto P, cumple: $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P)=-6$, $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(P)=17$.
    ¿En qué dirección, partiendo del punto P, es máxima la variación del campo? ¿Cuánto vale esa variación?

27. Halla, en cada caso, las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la gráfica de la ecuación dada en el punto P indicado:

    1) $z = 4x^2 - y^2$, $P(5,-8,36)$. 2) $x = \ln\frac{y}{2z}$, $P(0,2,1)$.

    3) $\sin^2 x + \cos(y+z) = \frac{3}{4}$, $P\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},0\right)$.

    4) $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0$, $P(1,1,2)$.

    5) $xz^2 + e^z + y = 0$, P(2,-3,1), $P(1,-1,0)$

    6) $xy + 2yz - xz^2 = -10$, en P(-5,5,1).

28. Halla los puntos del paraboloide $z = 4x^2 + 9y^2$ en los que la recta normal es paralela a la recta que pasa por los puntos $P(-2,4,3)$ y $Q(5,-1,2)$.

29. Halla, en cada caso, el ángulo que forman las rectas normales a las superficies dadas en el punto de intersección P:

    a) $S : z = x^2$, $S_2 : y = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}$, $P(1,1,1)$.

    b) $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (esfera), $S : x^2 + y^2 = \ ^2$ (cono), y P cualquier punto de su intersección.

30. La resistencia total R, resultante de tres resistencias R_1, R_2 y conectadas en paralelo, está dada por $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. Los valores de , R_2 y R_3 son, respectivamente, 100, 200 y 400 ohmios. En su medición se ha cometido un error máximo del 1%. Estima, mediante la aproximación lineal, el máximo error que puede cometerse al calcular R con la fórmula anterior.

31. Una caja rectangular sin tapa, cuyas medidas interiores son 5, 3 y 2 dms., está hecha con tablas de 0.5 cms de grosor. Calcula, mediante la aproximación lineal, la cantidad, en centímetros cúbicos, de material utilizado.

32. Una viga rectangular apoyada en sus extremos que soporta una carga uniforme se comba en su parte central. La medida S del combamiento se llama *flexión* de la viga y está dada por la fórmula $S = C\frac{px^4}{wh^3}$, donde p es la carga en Kg/m y x, w y h son la longitud, el grosor y la altura de la viga, medidos en metros. La constante C depende del material de la viga. ¿En qué puntos es diferenciable la función $S(p,x,w,h)$?

    Fijados los valores $p = 100$ Kg/m, $x = 4$ m., $w = 0.1$ m. y $h =$ m.,

    a) Obtener la aproximación lineal del incremento de S si las variables aumentan en un 1%.

    b) ¿Qué provocará menor flexión la disminución de un centímetro en el grosor o en la altura de la viga?

33. El operador gradiente ∇ de un campo escalar diferenciable $f(x,y,z)$ actúa de modo que a cada punto le asigna el vector gradiente de f en ese punto: $\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,\mathbf{k}$.

    Halla el gradiente de los campos siguientes:

    1) $U(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. 2) Un campo constante.

    3) La suma y el producto de dos campos diferenciables.

    4) El cociente de dos campos diferenciables si el del denominador no se anula.

34. El operador laplaciano Δ de un campo escalar , con derivadas parciales segundas continuas, actúa de modo que a cada punto le asigna el número real:

    $$\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z).$$

    Probar que si el campo f depende de $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, es decir, $f(x,y,z) = g(r)$, con g dos veces derivable, entonces en cada punto $\neq 0\,0\,0$ se cumple: $\Delta f(x,y,z) = g''(r) + \frac{2}{r}g'(r)$.