Tema 18. Campos vectoriales. Matriz jacobiana

1. Representa el campo gradiente de $u(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$ y la curva equipotencial $u=\dfrac{\pi}{4}$.

2. Averigua si los vectores velocidad de la trayectoria $\mathbf{r}(t)=(3\cos t, 3\sin t)$ verifican $\mathbf{F}(x,y)=(-y,x)$, es decir, si $\mathbf{r}(t)$ es una linea de flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y)$.
¿Es $\mathbf{r}(t)=(\cos t,-\sin t)$ una linea de flujo de
$$\mathbf{F}(x,y)=\left(\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{-x}{x^2+y^2}\right)?$$

3. Los siguientes puntos del espacio están dados en coordenadas cilíndricas; expresar cada uno en coordenadas cartesianas y en coordenadas esféricas:
$$\left(1,\ \frac{\pi}{4},\ 1\right);\qquad \left(2,\ \frac{\pi}{2},\ -4\right);\qquad \left(1,\ -\frac{\pi}{6},\ 0\right).$$

4. Cambiar los puntos siguientes de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas:
$$(0,\ 3,\ 4);\qquad \left(\sqrt{2},\ 1,\ 1\right);\qquad (2,\ 1,\ -2).$$

5. ¿Qué significan geométricamente cada una de las siguientes transformaciones del espacio dadas en coordenadas cilíndricas:
$$(r,\theta,z)\longrightarrow(r,\theta,-z);\qquad (r,\theta,z)\longrightarrow(r,\theta+\pi,z)?$$
Idem en coordenadas esféricas:
$$(\rho,\theta,\varphi)\longrightarrow(\rho,\theta+\pi,\varphi);\qquad (\rho,\theta,\varphi)\longrightarrow(\rho,\theta,\pi-\varphi)$$

6. Dibuja o describe la figura formada por los puntos cuyas coordenadas cilíndricas (r,θ,z) verifican cada una de las siguientes ecuaciones :

   1) $r=5$,   2) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$,   3) $z=2$

   4) $r=3\cos\theta$,   5) $r^2+z^2=9$,   6) $r^2\cos 2\theta+z^2=4$.

7. Dibuja o describe la figura formada por los puntos cuyas coordenadas esféricas (ρ,θ,φ) verifican las siguientes ecuaciones :

   1) $\rho=5$,   2) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$,   3) $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$,

   4) $\rho=3\cos\varphi$,   5) $\rho\sin\varphi=1$.

8. Un cartucho de filtro de aceite está hecho de un material poroso con la forma de cilindro circular recto por el cual fluye el aceite desde su eje hacia la superficie exterior. Describe el cartucho en coordenadas cilíndricas, si el diámetro del filtro es de 11.5 cm, la altura de 14 cm y el centro del cartucho está vaciado desde arriba y a lo largo del eje para permitir la entrada de un perno de 1.6 cm de diámetro.

9. Calcula los límites que se indican a continuación:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{e^{xy}}{x+y+2},\frac{\tan x}{x}\right)$;

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2},\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

10. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

    a) $\mathbf{f}(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sin xy}{x^2+y^2},\ln\dfrac{x^2+1}{y^2+1}\right), & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0), & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

    b) $\mathbf{f}(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}},x\sin y\right), & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0), & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

11. Calcula las derivadas parciales primeras de los campos:
    a) $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$;
    b) $\mathbf{F}(x,y,z,t) = \left(x + e^z, tx^2 + \ln y\right)$.

12. Calcula la divergencia y el rotacional de cada uno de los siguientes campos vectoriales. Indica cuáles son incompresibles (divergencia igual a cero) y cuáles irrotacionales (rotacional igual al vector nulo)
    a) $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$;
    b) $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$;
    c) $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$;
    d) $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}\right)$;
    e) $\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{k}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}(x,y,z)$.

13. Calcula el gradiente y el laplaciano de los campos escalares:
    $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$; $\qquad g(x,y,z) = \dfrac{xz}{y}$.

14. Comprueba que los operadores divergencia, rotacional, gradiente y laplaciano son lineales.

15. Considera el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = x^4\mathbf{i} + y^4\mathbf{j} + z^4\mathbf{k}$.
    Se pide calcular la derivada direccional del campo escalar $\operatorname{div}\mathbf{F}$ en el punto $P(4,4,2)$ en la dirección del vector $\mathbf{n}$ perpendicular a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

16. Estudia la diferenciabilidad y calcula la matriz de derivadas parciales o matriz jacobiana de los siguientes campos vectoriales:
    a) $\mathbf{F}(x,y) = \left(x + y, x - y, xy\right)$;
    b) $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x + e^z + y\right)\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j}$.

17. Supongamos que $\mathbf{F}: \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ es una aplicación lineal, ¿cuál es la matriz jacobiana de $\mathbf{F}$?

18. Calcula el determinante jacobiano (determinante de la matriz de derivadas parciales) e intenta dar una interpretación del resultado:
    a) Traslación: $\begin{cases} x = u + 2 \\ y = v - 3 \end{cases}$;
    b) Dilatación: $\begin{cases} x = 2u \\ y = 3v \end{cases}$;
    c) Rotación: $\begin{cases} x = u\cos\alpha - v\sin\alpha \\ y = u\sin\alpha + v\cos\alpha \end{cases}$;
    d) Cambio de coordenadas polares a cartesianas: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$;
    e) Cambio de coordenadas cilíndricas a cartesianas: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$;
    f) Cambio de coordenadas esféricas a cartesianas: $\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$.