Tema 1.
Los números reales

Una construcción rigurosa y completa del Cálculo diferencial e integral depende de un estudio cuidadoso del sistema de los números reales. En este tema nuestro objetivo es utilitarista y no nos ocupamos de construir ni de estudiar con detenimiento los números reales.

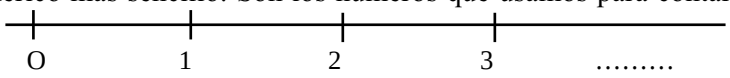
Pensamos que el lector ha manejado suficientemente la Aritmética de los números reales y que conoce su representación en la recta real. Así, sólo vamos a recordar la relación de *orden* en **R**, el *valor absoluto* de un número real y la distancia asociada, los diferentes *intervalos* en **R**, y, finalmente, indicaremos algunas ideas sobre los números decimales, que habitualmente usamos para dar *aproximaciones* de un número real.

1.1. Los distintos conjuntos de números

De ahora en adelante, reservamos la letra **R** para designar el conjunto de los números reales. Comenzamos con un resumen de los distintos conjuntos de números contenidos en **R**.

• *Los números naturales*

El conjunto de los números naturales $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ es el conjunto numérico más sencillo. Son los números que usamos para contar.

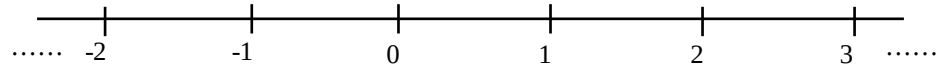


• *Los números enteros*

La necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales se puede expresar en términos de resolución de ecuaciones. Así, la ecuación $x + 2 = 1$ no tiene solución en el «mundo» de los números naturales. Interesa disponer de un conjunto de números en el que la ecuación lineal $x + a = b$ tenga siempre solución y sea única.

M. Dolores Lerís
Uinversidad de Zaragoza, España

Este conjunto es el de los números enteros $\mathbf{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$, formado por los naturales, sus opuestos y el 0. Es claro que $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$.

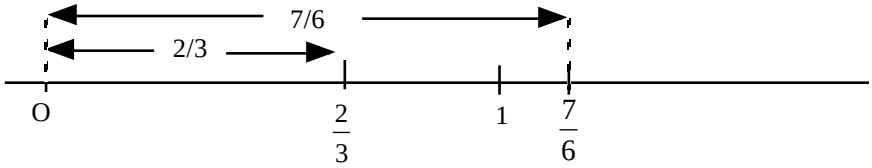


• *Los números racionales*

El conjunto de los números enteros todavía no da solución a todas las posibles ecuaciones lineales. Por ejemplo, ningún número entero es solución de la ecuación lineal $2x=1$. De nuevo, nos interesa disponer de los números que sean necesarios para que la ecuación lineal $mx=n$ tenga solución y sea única.

Precisamente los números racionales $\mathbf{Q}=\left\{\frac{n}{m}\ :\ n\in\mathbf{Z},\ m\in\mathbf{Z},\ m\neq 0\right\}$ son los que necesitamos. De nuevo, es claro que $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$.

La razón algebraica que hemos indicado como justificación de la necesidad de ampliar **Z** a **Q**, la leemos ahora en el lenguaje de «medidas de longitudes»: los números naturales están muy separados para medir con precisión cualquier longitud posible, ello obliga a considerar particiones de la unidad de medida y así llegar a los números racionales.



Es el momento de detenerse para recordar que un número racional se puede representar de diferentes formas. Acabamos de escribir un hecho conocido y que está ilustrado en el ejemplo siguiente:

$$\frac{3}{8}=\frac{6}{16}=\ldots=\frac{3n}{8n}=0{,}375,\quad n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}.$$

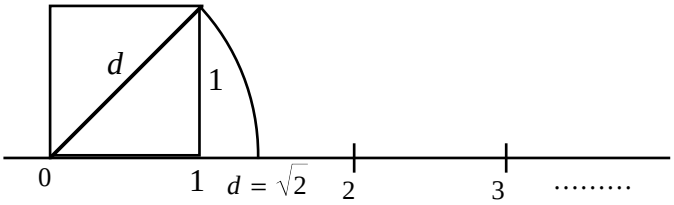
Las representaciones $\frac{3}{8}=\frac{6}{16}=\ldots=\frac{3n}{8n}$ se llaman representaciones fraccionarias, y la fracción $\frac{3}{8}$, cualificada por la propiedad de que el numerador y el denominador son números primos entre sí, se conoce como representación fraccionaria irreducible. Además se ha escrito la representación $0{,}375$ conocida como representación decimal; de hecho, el número racional $\frac{3}{8}=0{,}375$ es un número decimal. Dejamos al lector que piense sobre esta

pregunta: ¿el número racional $\frac{2}{3}$ es un número decimal?

• *Los números reales*

Del mismo modo que hemos ido argumentando las sucesivas extensiones de los conjuntos numéricos, se precisa ahora una ampliación del conjunto **Q** para que la ecuación polinómica de grado dos $x^2 = a$, $a \geq 0$, tenga solución.

Por ejemplo, no hay ningún número racional que sea solución de la ecuación $x^2 = 2$. Este hecho, que ya era conocido por los griegos, tiene una sencilla interpretación geométrica: es imposible expresar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 mediante un número racional.



Finalmente, describimos el conjunto de números reales **R** como los números necesarios para medir todas las longitudes posibles, junto con sus opuestos y el cero. La cadena de contenidos de los conjuntos numéricos queda finalmente así: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Dejamos planteada al lector una pregunta: ¿hay algún número real que sea solución de la ecuación polinómica de grado dos $x^2 = -1$? Esta cuestión será el punto de partida del siguiente tema sobre los números complejos.

1.2. La relación de orden en **R**

La relación de orden entre dos números reales a y b, escrita $a \leq b$, se lee «*a es menor o igual, inferior o anterior a b*». O en caso contrario, $a \geq b$, se lee *«a es mayor o igual, superior o posterior a b»*.

Propiedades: (La relación de orden $\leq$ es de orden total)
- Reflexiva: $a \leq a$, $\forall a \in \mathbf{R}$
- Antisimétrica: Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$
- Transitiva: Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$

- Dicotomía: Dos números reales a y b siempre son comparables, esto es, o bien $a \le b$ o bien $a \ge b$.

El manejo de desigualdades y, por tanto, la resolución de inecuaciones necesitan de las propiedades y consecuencias que a continuación enunciamos.

Propiedades: (La relación de orden $\le$ es compatible con las operaciones)
Las letras a, b y c designan números reales cualesquiera.

- Compatible con la suma: Si $a \le b$, entonces $a + c \le b + c$.
- Compatible con el producto:
  Si $a \le b$ y $c \ge 0$, entonces $a.c \le b.c$
  Si $a \le b$ y $c \le 0$, entonces $a.c \ge b.c$

Consecuencias:

- Relación entre opuestos: Si $a \le b$, entonces $-a \ge -b$.
- Relación entre inversos: Si $0 < a \le b$, entonces $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$.

Ejercicios: Vamos a calcular el conjunto de soluciones de algunas inecuaciones

1. $-1 < 3x + 5 < 6$. La cadena de equivalencias que escribimos a continuación son el resultado de aplicar sucesivamente las propiedades de compatibilidad del orden con la suma, al restar 5 a las desigualdades, y con el producto, al multiplicar por el número positivo $\frac{1}{3}$.

   Así tenemos: $-1 < 3x + 5 < 6 \Leftrightarrow -6 < 3x < 1 \Leftrightarrow -2 < x < \frac{1}{3}$.

   Luego las soluciones son todos los números reales entre -2 y $\frac{1}{3}$, ambos excluidos.

2. $2x - 4 \le 6 - 7x \le 3x + 6$. Solución: $\left\{ x \in \mathbf{R} : \ 0 \le x \le \frac{10}{9} \right\}$.

3. $\frac{1+x}{1-x} > 0$. Para resolver esta inecuación usamos la regla de los signos y así decimos $\frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x > 0 \text{ y } 1-x > 0 \\ \text{o} \\ 1+x < 0 \text{ y } 1-x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \text{o} \\ x < -1 \text{ y } 1 < x \end{cases}$,
   así pues, la solución son los números reales entre -1 y 1, ambos excluidos, esto es, $\{ x \in \mathbf{R} : \ -1 < x < 1 \}$.

4. $1-x^2 \geq 0$.

La solución de esta inecuación se consigue usando el procedimiento que acabamos de emplear; si bien es necesario realizar el paso previo de factorizar el polinomio del primer miembro. Y así, hay que resolver la inecuación $(1+x)(1-x) \geq 0$.

La solución es $\{x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 1\}$.

1.3. El valor absoluto de un número real

Cuando se habla de valor absoluto o módulo de un número real, se suele pensar en borrarle a dicho número el signo negativo que pueda tener delante. Esta idea tan sencilla es la que está plasmada en la siguiente definición.

Definición: El *valor absoluto* o *módulo* de un número real a es el número real que se escribe $|a|$ y se define de la forma siguiente

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

En lenguaje geométrico, $|a|$ es la distancia del punto a de la recta al origen O de la misma. Más aún, $|a-b|$ es la distancia desde a hasta b.

Propiedades: Las letras a y b designan números reales cualesquiera y la letra r es un número real positivo.

- Respecto a las operaciones:

$$|a.b| = |a|.|b|; \qquad |a+b| \leq |a| + |b|; \qquad \big||a| - |b|\big| \leq |a-b| \leq |a| + |b|.$$

- Respecto a la relación de orden:

Si $|a| \leq r$, entonces $-r \leq a \leq r$.

Si $|a| \geq r$, entonces o bien $a \geq r$ o bien $a \leq -r$.

Ejercicios: Calculamos en este ejercicio el conjunto de soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones o inecuaciones:

1. $|2x+1| = 3$. Aplicamos la definición de valor absoluto:

$$|2x+1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = 3 \\ \text{o} \\ 2x+1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{o} \\ x = -2 \end{cases}.$$

La ecuación tiene dos soluciones: -2 y 1.

2. $|2x+3|<6$. Por las propiedades respecto a la relación de orden:

$$|2x+3|<6 \Leftrightarrow -6<2x+3<6 \Leftrightarrow \frac{-9}{2}<x<\frac{3}{2}.$$

Luego las soluciones de la inecuación son los números reales entre $-4,5$ y $1,5$, ambos excluidos.

3. $\left|x^2-3\right|<1$. De nuevo, por las propiedades respecto a la relación de orden:

$$\left|x^2-3\right|<1 \Leftrightarrow -1<x^2-3<1 \Leftrightarrow 2<x^2<4 \Leftrightarrow \sqrt{2}<|x|<2.$$

Luego las soluciones de la inecuación son los números reales negativos entre -2 y $-\sqrt{2}$, ambos excluidos, y los números reales positivos entre $\sqrt{2}$ y 2, también ambos excluidos.

4. $(x-2)^2 \geq 4$.

Como $(x-2)^2 \geq 4 \Leftrightarrow |x-2| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \leq -2 \\ \text{o} \\ x-2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ \text{o} \\ x \geq 4 \end{cases}$, entonces las soluciones de la inecuación son los números reales del conjunto: $\{x \in \mathbf{R} : x \leq 0 \text{ o } x \geq 4\}$.

1.4. Intervalos en **R**

Intervalos acotados en **R** (o segmentos de la recta): a y b designan números reales tal que $a \leq b$.

- El *intervalo abierto* (a,b) es el conjunto de los números reales que están entre a y b, excluyendo estos dos valores a y b. Esto es, $(a,b)=\{x \in \mathbf{R} : a<x<b\}$

  Si se quiere destacar el centro $x_0 = \frac{a+b}{2}$ del intervalo, éste se escribe:

  $$(a,b)=(x_0-r, x_0+r)=\{x \in \mathbf{R} : |x-x_0|<r\},$$

  siendo r el radio del intervalo, o sea, $r=\frac{b-a}{2}$.

- El *intervalo cerrado* $[a,b]$ es el conjunto de los números reales que están entre a y b, incluyendo estos dos valores a y b. Esto es, $[a,b]=\{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$.

De nuevo, si destacamos el centro x_0 y el radio r del intervalo, escribimos: $[a,b]=[x_0-r,x_0+r]=\{x\in\mathbf{R}:\ |x-x_0|\le r\}$.

- Los *intervalos semiabiertos o semicerrados* $(a,b]$ y $[a,b)$ son: $(a,b]=\{x\in\mathbf{R}:\ a<x\le b\}$ y $[a,b)=\{x\in\mathbf{R}:\ a\le x<b\}$.

Intervalos no acotados en $\mathbf{R}$ (o semirrectas): a es un número real cualquiera

$(-\infty,a)=\{x\in\mathbf{R}:\ x<a\}$, $(-\infty,a]=\{x\in\mathbf{R}:\ x\le a\}$,
$(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}:\ a<x\}$, $[a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}:\ a\le x\}$,
$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$.

1.5. Aproximación decimal de un número real

Recordemos un ejemplo usado al hablar de las distintas formas de representar un número racional. Era el número racional $\frac{3}{8}$ =0' 375 , que ya dijimos que también es un número decimal. Y se hizó la pregunta: ¿el número racional $\frac{2}{3}$ es un número decimal?, que esperamos se haya respondido con un rotundo NO.

No es ningún secreto que el proceso de construcción de la representación decimal de $\frac{3}{8}$ consiste sencillamente en efectuar el algoritmo de división. Desde luego, también es posible iniciar la división para el otro número racional $\frac{2}{3}$, pero esta división no acaba nunca (entendiendo que acabar una división significa llegar al resto cero), e incluso se escribe $\frac{2}{3}$ =0'6666 ... $\widehat{\ }$

Ahora bien, hemos oído y usado que el número racional $\frac{2}{3}$ admite como valores aproximados ciertos números decimales. Por ejemplo, si paramos la división en la tercera cifra decimal, está claro que $0{,}666<\frac{2}{3}<0{,}667$; y por esta razón decimos que «el número decimal 0'666 es un *valor decimal que se aproxima por defecto* al número $\frac{2}{3}$» y también decimos «el número decimal

$0'667$ es un *valor decimal que se aproxima por exceso* al número $\frac{2}{3}$».

Un comentario: La escritura $\frac{2}{3} = 0'6666.....=\widehat{6}$ nos da pie para recordar que los números decimales junto con los números racionales que admiten desarrollos decimales ilimitados periódicos están en biyección con los números racionales.

Afortunadamente, cualquier número real, no sólo los racionales, goza de la propiedad que hemos ilustrado con el ejemplo $\frac{2}{3}$. Es decir, *todo número real admite aproximaciones decimales por defecto y por exceso*. Decimos «afortunadamente» porque esto ofrece la ventaja de uniformar los cálculos, pues todas las operaciones se efectúan como si los datos fuesen enteros. El inconveniente es que los resultados dejan de ser exactos, pues si queremos usar una máquina de cálculo es forzoso prescindir de las infinitas cifras decimales desde una de ellas en adelante.

Finalmente, no se puede hablar de aproximaciones sin mencionar el error cometido. Recordemos las ideas.

Definición: Si $aprox$ es un valor aproximado del número x, entonces se conoce como *error absoluto* de la aproximación $x \approx aprox$ a la distancia entre ambos valores, es decir,

$$\text{Error absoluto} = |x - aprox|.$$

Se llama *error relativo* de la aproximación $x \approx aprox$ al error absoluto por cada unidad, es decir,

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{x - aprox}{x}\right|.$$

Obviamente, el porcentaje de error es cien veces el error relativo.

Ejercicio: Resolvemos este sencillo ejercicio. Consideremos la aproximación decimal $\frac{1}{3} \approx 0'333$; ¿cuál es el error absoluto de la aproximación?

El error absoluto es $\left|\frac{1}{3} - 0'333\right| = \frac{1}{3000} = 0'000\widehat{3}$, que está acotado por el número decimal 0'0004

¿Y el error relativo? $\text{Error relativo} = \left| \frac{\frac{1}{3} - 0{,}333}{\frac{1}{3}} \right| = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$, y así el porcentaje de error es 0'1%