Tema 2.
Los números complejos

Algunos problemas elementales de la ingeniería, como los relacionados con modelos de circuitos eléctricos o con sistemas mecánicos que vibran necesitan una herramienta matemática: *los números complejos*. En este tema pretendemos poner en manos del estudiante el material básico sobre los números complejos.

No obstante, queremos aprovechar estas líneas para decirle al lector que el estudio de los números complejos es el primer paso para adentrarse en una de las ramas más útiles y bellas de las matemáticas: «la teoría de funciones de variable compleja» o, abreviadamente, «análisis complejo»". Si se quieren abordar los problemas del flujo de calor o la dinámica de fluidos o la teoría electromagnética o muchos otros campos de la ciencia y de la ingeniería, es necesario el conocimiento detallado del análisis complejo.

2.1. El cuerpo de los números complejos

En el estudio de las soluciones de ecuaciones polinómicas nos encontramos con ecuaciones sencillas, como por ejemplo $x^2+1=0$, para las que no existe solución real. Este problema hizo surgir la teoría de los números complejos. Después de muchas dudas,[1] los matemáticos de la época se decidieron a «añadir» a los números reales un nuevo número, la unidad imaginaria *i,* y a manejar las expresiones $a+bi$, donde a y b son números reales, sujetos a las mismas leyes aritméticas de **R**.

Con la necesidad de resolver este problema se define el número imaginario *i* como $\sqrt{-1}$ ($i^2=-1$), y un conjunto con estructura de cuerpo que lo contenga y generalice al de los números reales.

Forma binómica de un número complejo

Definición: Llamamos *conjunto de los números complejos* al conjunto

1 Los términos imaginario y complejo que todavía usamos hoy nos dan una idea de la atmósfera de misterio y desconfianza que rodeó el nacimiento de estos nuevos números.

$$\mathbf{C} = \{a + bi \quad | \quad a, b. \ \mathbf{R}\},$$

y a cada elemento $a + bi$ de **C** se le denomina *número complejo* en *forma binómica*.

Es inmediato ver que para $b = 0$ se tiene un número real, es decir, **C** contiene a **R**. Es por esto que el valor a recibe el nombre de *parte real* de z y se escribe Re(z). Además, b se dice *parte imaginaria* de z y se escribe Im(z).

Por otra parte, dos números complejos se dicen *iguales* si tienen igual parte real e igual parte imaginaria.

En **C** se definen las operaciones suma y producto:

$+$: $\quad (a+bi)+(c+di) \quad = \quad (a+c)+(b+d)i \quad a,b,c,d. \ \mathbf{R}$,

$\cdot$: $\quad (a+bi)\bullet(c+di) \quad = \quad (ac-bd)+(ad+bc)i \quad a,b,c,d. \ \mathbf{R}$,

que le proporcionan la estructura de cuerpo.

Ejemplo: $(3-2i)\bullet(1+3i) = (3-(-2)3)+(9-2)i = 9+7i$.

Ejercicio: Halla los números reales x e y tales que $\dfrac{43+i\,y}{x-5i} = 4+3i$.

Para resolver esta ecuación, planteada como una igualdad entre dos números complejos, previamente se transforma el cociente —cuyo cálculo dejamos por el momento— en producto. De esta forma, $43+i\,y = (4+3i)(x-5i)$. $43+i\,y =$ $= (4x+15)+(3x-20)i$. Por último, la igualdad se verifica si $\begin{cases} 43 = 4x+15 \\ y = 3x-20 \end{cases}$, es decir, si $\begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$.

Ejemplo: La potencia i^{23}, en general i^n, se puede calcular aplicando reiteradamente la definición del producto. Sin embargo, hay un método mucho más rápido. Observando los valores de las primeras potencias de i descubrimos que éstos se repiten, de modo que, si el exponente aumenta o disminuye en un múltiplo de 4, el resultado es el mismo; así, $i^n = i^l$ siendo l el resto de $n/4$. En nuestro caso, $i^{23} = i^3 = -i$.

Podríamos también calcular z^n aplicando la definición del producto, pero esta tarea la abordaremos más adelante.

Ejercicio: Comprueba que para cualquier número natural n se verifican:

i) $i^{2n} + i^{-2n} = (-1)^n 2$, ii) $i^{2n} - i^{-2n} = 0$.

Representación gráfica de los números complejos

Podemos realizar una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números complejos y el conjunto de pares ordenados.

$$C \quad . \; .. \quad . .. \quad \mathbf{R} \text{ x } \mathbf{R},$$
$$\{a + bi \mid a, b . \; \mathrm{R}\} \quad . \; . \; . \; . \; .. \quad \{(a, b) \mid a, b . \; \mathrm{R}\}.$$

Con esta identificación se proporciona un método de representación de un número complejo mediante un punto en el plano. Para ello tomamos unos ejes de coordenadas cartesianas y leemos la parte real (primera coordenada) en el eje OX y la parte imaginaria (segunda coordenada) en el eje OY. El número $z = a + bi$ queda determinado de forma única por el punto (a, b).

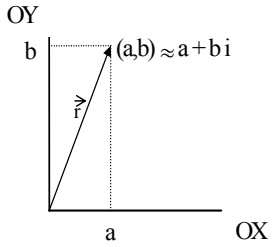


FIGURA 1

Ejercicio: Determina gráficamente el conjunto de puntos z que verifican $\mathrm{Re}(z) > c$ e $\mathrm{Im}(z) < c$.

Representamos en la figura 2 los puntos solución sombreando la región del plano a la que pertenecen. Las líneas discontinuas indican que esos puntos no son solución.

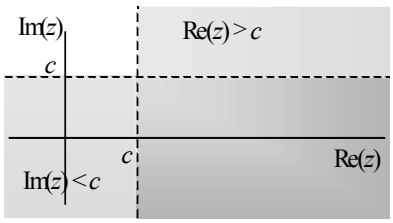


FIGURA 2: $\mathrm{Re}(z) > c$ e $\mathrm{Im}(z) < c$.

La aplicación conjugación

Definición: Se llama número *complejo conjugado* de $z = a + bi$. **C** al número complejo $\bar{z} = a - bi$.

La operación de conjugación se puede interpretar como una simetría respecto del eje OX en el plano (ver fig. 3).

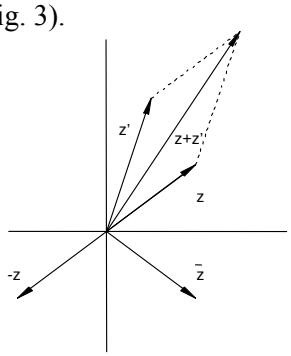


FIGURA 3: Representación de la suma de dos números complejos, del opuesto y del conjugado de *z*.

Propiedades: Dados los números complejos z y $z\ni$, se verifica

i) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ y $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$,

ii) $z = \bar{z}$. z. **R**,

iii) $\bar{\bar{z}} = z$,

iv) $\overline{z + z\ni} = \bar{z} + \overline{z\ni}$,

v) $\overline{z \bullet z\ni} = \bar{z} \bullet \overline{z\ni}$,

vi) $z \bullet \bar{z} = a^2 + b^2$ si $z = a + bi$.

Ejercicio: Halla los números complejos que tienen parte real igual a 1 y que cumplen: $z \bullet \bar{z} - z - \bar{z} = 3$.

La condición a verificar se puede expresar como $|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,z = 3$ y, por otro lado, los números son de la forma $1 + b\,i$, por lo que $1 + b^2 - 2 = 3 \Rightarrow b = \pm 2$.

Cociente de números complejos

De la propiedad (vi) se deduce un método sencillo para el cálculo del cociente de dos números complejos. Éste consiste en multiplicar numerador y denominador por el conjugado del número del denominador. Así el cociente se reduce al cálculo de un producto. Sean $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\bar{z}_2}{z_2\,\bar{z}_2} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{\left(a_2{}^2+b_2{}^2\right)} =$$
$$= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)\,i}{\left(a_2{}^2+b_2{}^2\right)}.$$

Ejercicio: Determina a y b para que se verifique $\dfrac{7+i}{3+4i}=\dfrac{a+bi}{4-i}$.

Operando $\dfrac{(7+i)(3-4i)}{9+16}=\dfrac{(a+bi)(4+i)}{16+1} \Rightarrow 17\,(1-i)=(4a-b)+(4b+a)i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 17=4a-b \\ -17=4b+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \end{cases}.$$

Problemas propuestos

1. Efectúa las siguientes operaciones con números complejos:

i) $\dfrac{-5+5i}{4-3i}$, ii) $\dfrac{2-3i}{4-i}$, iii) $\dfrac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$,

iv) $(-1+2i)^2\left(\dfrac{4}{1-i}+\dfrac{2-i}{1+i}\right)$, v) $\dfrac{(1+2i)^3}{(1+i)(2-i)(1-3i)}$,

vi) $\dfrac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}$, vii) $\dfrac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}+i^{16}}$.

2. Dado el número complejo $z=\dfrac{3-2ai}{4-3i}$, calcula el valor del número real a para el cual z es real. Determina z.

2.2. Otras formas de expresar un número complejo

Módulo y argumento de un número complejo: formas trigonométrica y polar

Definición: Llamamos *módulo de un número complejo* $z=a+bi$ al número real no negativo

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Notamos que $|z|$ es el módulo del vector de posición del punto (*a, b*) (fig. 1).

Propiedades: Dados $z, z' \in \mathbf{C}$, se verifican:

i) $|z|^2 = z \bullet \bar{z}$,

ii) $|z| = |\bar{z}|$,

iii) $|z| = 0$. $z = 0$,

iv) $|z + z'| = |z| + |z'|$,

v) $|z \bullet z'| = |z| \bullet |z'|$.

Ejercicio: Demostrar la propiedad i) en la que se afirma que $|z|^2 = z \bullet \bar{z}$.

En efecto, si $z = a + bi \Rightarrow z \bullet \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Definición: Dados *z* y *z´,* dos números complejos, se llama *distancia* de *z* a *z´* al número real

$$d(z, z') = |z - z'|,$$

que satisface las propiedades de una métrica.

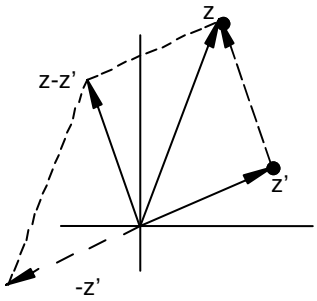


FIGURA 4: $|z - z'|$ representa la distancia entre *z* y *z'*.

Ejemplo: Sean z_1 y z_2 fijos. Los puntos *z* del plano que verifican $|z - z_1| = |z - z_2|$ son los que distan de z_1 lo mismo que de z_2, es decir, están sobre la recta equidistante de esos dos puntos.

Ejercicio: Determina los números complejos con parte real positiva que verifican $|z - i| > 1$.

Definición: Si z . 0 se llama *argumento principal*, $\operatorname{Arg} z$, de $z = a + bi$ al ángulo . . $[-\pi, \pi)$ que verifica cos. $= \dfrac{a}{|z|}$ y sen. $= \dfrac{b}{|z|}$.

Ejemplos: i) Si $z = 3 + 3i$, entonces $|z| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ y $\operatorname{Arg} z = \dfrac{\pi}{4}$, ya que $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. ii) Si $z = -1 + \sqrt{3}i$, entonces $|z| = 2$ y $\operatorname{Arg} z = \dfrac{2\pi}{3}$, ya que $\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ y $\cos\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Gráficamente, $\operatorname{Arg} z$ es el ángulo que forma el eje OX con el vector posición del punto asociado a *z*; naturalmente, si no se exige que esté en $[-\pi, \pi)$, este ángulo no es único; así, se dice *argumento de z,* arg *z*, al conjunto de valores . $+ 2k\pi$ con k . Z (fig. 5).

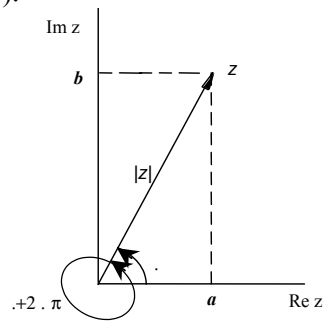
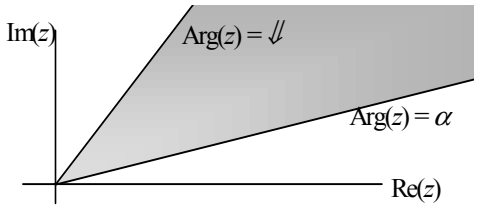


FIGURA 5

La relación de igualdad entre dos números complejos implica la igualdad de sus módulos, pero no de sus argumentos. Para estos últimos simplemente podemos asegurar que su diferencia es un múltiplo de 2π.

$$z = z\ni \quad . \quad \begin{cases} |z| = |z\ni|, \\ \arg(z) = \arg(z\ni) + 2k\pi. \end{cases}$$

Ejercicio: Determina gráficamente el conjunto de puntos *z* que verifican $\alpha = \operatorname{Arg} z = \Downarrow$.



Si $z = a + bi$. 0 , ver figura 5, la relación entre los distintos parámetros asociados a z es

$$|z| = a^2 + b^2 , \quad \arg z = \arccos \frac{a}{|z|} \text{ y } \arg z = \operatorname{arc}\, sen \frac{b}{|z|} ;$$

será Arg z si se toma en $[-\pi, \pi)$. Recíprocamente, si . . arg z y $r = |z|$, se tiene

$$a = r \cos. \quad , \; b = r \operatorname{sen}. \; ,$$

luego z se puede representar mediante el par ($|z|$,arg z), y esto nos llevará a las próximas definiciones.

Definición: Sea z no nulo, si . . arg z y $r = |z|$, se dice que r es la *forma polar* de z y que $r \cos. + i\, r \operatorname{sen}.$ es la *forma trigonométrica* de z.

Ejemplos: i) Si $z = 3 + 3i$, entonces su forma polar será $\left(3\sqrt{2}\right)_{45^\circ}$ o $\left(3\sqrt{2}\right)_{\pi/4}$.

ii) Si $z = -1 + \sqrt{3}i$, su forma polar es $2_{\frac{2\pi}{3}}$.

Ejercicio: Calcula la parte real e imaginaria de $z = 6_{\pi/6}$, $8_{3\pi/4}$, 10_{150° , 12_{330° .

Operaciones con números complejos escritos en forma polar

Comenzamos viendo cómo se realizan las operaciones definidas anteriormente cuando los números vienen expresados en forma polar.

Dados dos números complejos no nulos, r y r se verifican:

i) $r \bullet r = (r \bullet r)$,

ii) $(r)^{-1} = \left(r^{-1}\right)$,

iii) $\dfrac{r}{r} = \left(\dfrac{r}{r}\right)$.

Ejemplo: Si $z_1 = 6_{\pi/6}$ y $z_2 = 10_{150^\circ}$, el producto y el cociente se hallarán expresando, previamente a los cálculos indicados, los argumentos en radianes. Así, $z_1 z_2 = 6_{\frac{\pi}{6}} \bullet 10_{\frac{5\pi}{6}} = 60_{\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}} = 60_{\pi} = -60$, y $\frac{z_2}{z_1} = \left(\frac{5}{3}\right)_{\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}} = \left(\frac{5}{3}\right)_{\frac{2\pi}{3}}$.

Esta forma de expresar los números complejos nos permite interpretar cómodamente el significado gráfico del producto de dos números complejos y del inverso de *z*. El producto de $z_1 = r_1 e^{i \cdot 1}$ por $z_2 = r_2 e^{i \cdot 2}$ se obtiene girando z_1 un ángulo igual a $\cdot\ _2$ y «alargando» o «encogiendo» el vector hasta que su módulo sea $r_1 \bullet r_2$. Por otro lado, el inverso de *z* se obtiene mediante una simetría respecto del eje OX y la modificación correspondiente del módulo hasta que tenga el valor igual a $1/r$ (ver figs. 6 y 7).

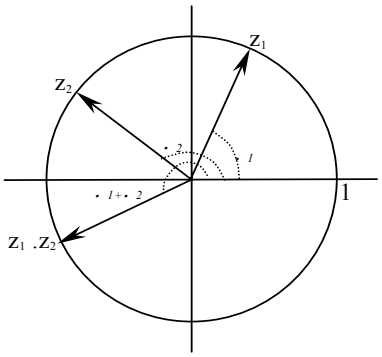


FIGURA 6: El producto de dos números complejos unitarios se representa mediante un giro.

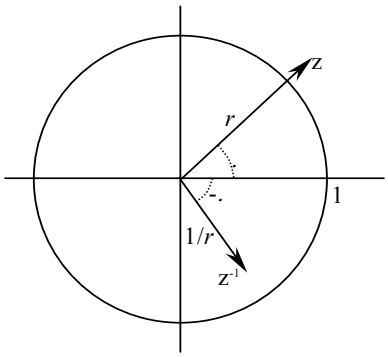


FIGURA 7: Si *z* es unitario, el inverso de z es su conjugado; en caso contrario, tienen argumentos opuestos pero difieren en el módulo.

Otras operaciones habituales entre números reales son la *potencia n-ésima* y *la raíz n-ésima*; para realizarlas entre números complejos es conveniente utilizar la forma polar o trigonométrica de los complejos.

Potencia n-ésima

La potencia *n*-ésima de un número complejo es

$$(r_{\cdot})^n = (r^n)_{n\cdot},$$

igualdad que se comprueba usando reiteradamente la fórmula del producto. Como caso particular se tiene la conocida *fórmula de Moivre*.

$$(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^n = \cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha$$

Ejemplo: El módulo y el argumento de $z=\left(1+\sqrt{3}i\right)^8$ son $\left(1+\sqrt{3}i\right)^8=\left(2_{\pi/3}\right)^8=$

$=\left(2^8\right)_{8\pi/3}=\left(256\right)_{2\pi+\left(2\pi/3\right)}=256_{2\pi/3}$.

Ejercicio: Calcula el valor de $\left(1+\sqrt{3}i\right)^n+\left(1-\sqrt{3}i\right)^n$.

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^n+\left(1-\sqrt{3}i\right)^n=\left(2_{\pi/3}\right)^n+\left(2_{-\pi/3}\right)^n=\left(2^n\right)_{n\pi/3}+\left(2^n\right)_{-n\pi/3}=2^{n+1}\cos\left(n\pi/3\right).$$

Si z es unitario, su representación gráfica estará sobre la circunferencia unidad, y claramente se ve que ocurre lo mismo para z^n; además, z^n es un punto que se obtiene al girar el vector posición de z un ángulo igual a $n\arg z$ (fig. 8).

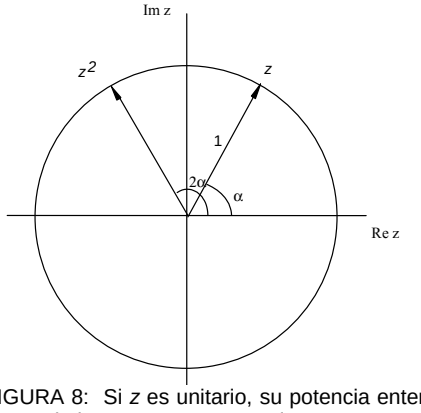


FIGURA 8: Si z es unitario, su potencia entera se puede interpretar como un giro.

Raíz n-ésima

Definición: Dados z. **C** y n. **N**, se llama *raíz n-ésima* de z a todo número complejo w tal que

$$w^n=z\,,$$

y se escribe $w=\sqrt[n]{z}$.

De forma inmediata se tiene la relación entre los módulos y los argumentos de $z=r_{\cdot}$ y $w=s_{\cdot}$:

$$s=\sqrt[n]{r} \qquad \cdot=\frac{\cdot+2k\pi}{n} \qquad k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Ejemplo: Sea $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}}$, expresamos previamente el argumento en forma polar $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}}=\sqrt[5]{1_{\pi/3}}$; entonces $\sqrt[5]{1_{\pi/3}}=1_{\frac{\pi/3+2k\pi}{5}}$ con $k = 0,1,\ldots,4$, son las cinco raíces resultantes, es decir, $z_1=1_{\frac{\pi}{15}}$, $z_2=1_{\frac{7\pi}{15}}$, $z_3=1_{\frac{13\pi}{15}}$, $z_4=1_{\frac{19\pi}{15}}$, $z_5=1_{\frac{25\pi}{15}}$ (fig. 9).

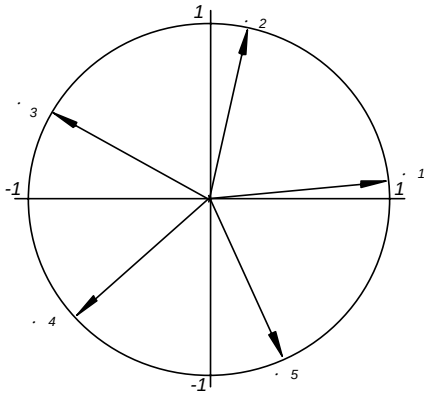


FIGURA 9: Representación de las cinco raíces quintas de $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$.

Como podemos comprobar en este ejemplo, las n raíces n-ésimas de z son n puntos equidistantes sobre una determinada circunferencia.

Si la potencia de base z tiene exponente fraccionario, se calcula así:

$$z^{m/n}=\left(\sqrt[n]{z}\right)^m.$$

Ejemplo: Como $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{5/6}=\left(\sqrt[6]{2_{\pi/3}}\right)^5=\left(\sqrt[6]{2}\right)^5_{\frac{5(\pi/3+2k\pi)}{6}}$ con $k = 0,1,\ldots,5$, las seis raíces resultantes son $z_1=\left(\sqrt[6]{2^5}\right)_{\frac{5\pi}{18}}$, $z_2=\left(\sqrt[6]{2^5}\right)_{\frac{35\pi}{18}}$, $z_3=\left(\sqrt[6]{2^5}\right)_{\frac{29\pi}{18}}$, $z_4=\left(\sqrt[6]{2^5}\right)_{\frac{23\pi}{18}}$, $z_5=\left(\sqrt[6]{2^5}\right)_{\frac{17\pi}{18}}$, $z_6=\left(\sqrt[6]{2^5}\right)_{\frac{11\pi}{18}}$.

2.3. La forma exponencial de un número complejo

La función exponencial

Definición: Se llama *función exponencial compleja* la que asigna a cada $z = a + b\,i$. **C** el número complejo

$$\exp z = e^a\left(\cos b + i \operatorname{sen} b\right) = \left(e^a\right)_b$$

De esta definición se deduce que $e^{i.} = \cos. + i \operatorname{sen}.$,[2] igualdad que nos permite expresar cualquier número complejo como $z = re^{i.}$, donde *r* es el módulo de *z* y . uno de sus argumentos. Obtenemos, así, la *forma exponencial* de *z*.

Ejemplos: i) $e^{i\pi} = -1$[3] ii) $e^{2k\pi i} = 1$ para todo k. **Z**.

Es inmediato ver que e^z coincide con la exponencial real cuando z. **R** . Por otro lado, vemos a continuación una propiedad muy interesante que diferencia a estas dos funciones.

Periodicidad de la función exponencial compleja

Propiedad: La función exponencial es periódica de periodo $2k\pi i$ con k. **Z**.

En efecto, para todo z. **C** y k. **Z** se tiene $e^{z+2k\pi i} =$ $= e^a\left(\cos(b + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(b + 2k\pi)\right) = e^a\left(\cos b + i \operatorname{sen} b\right) = e^z$.

Ejemplo: Calculamos los números que verifican $e^{6z} = 1$.

Sea $z = a + b\,i$, como $e^{6z} = e^{6a+6bi} = e^{6a}\left(\cos 6b + i \operatorname{sen} 6b\right)$, la ecuación se verifica si y sólo si $\begin{cases} e^{6a}\cos 6b = 1 \\ e^{6a}\operatorname{sen} 6b = 0 \end{cases}$. $\begin{cases} \operatorname{sen} 6b = 0 \\ e^{6a}\cos 6b = 1 \end{cases}$. $\begin{cases} 6b = 2k\pi \quad k.\ \mathbf{Z} \\ e^{6a} = 1 \end{cases}$.

$\begin{cases} b = k\pi/3 \quad k.\ \mathbf{Z} \\ a = 0 \end{cases}$.

Ejercicios: Calcular los números complejos que verifican las siguientes ecuaciones: i) $e^{4z} = i$, ii) $e^{3z} = 1 + i$.

---

2 Ecuación de Euler.

3 Si la expresamos como $e^{\pi i} + 1 = 0$, obtenemos una relación entre los cinco números más importantes en la Matemática.

Operaciones en forma exponencial

La forma exponencial de z es útil para el cálculo de potencias y de raíces de un número complejo. Si $z = re^{i.}$ y $z\ni = r\ni e^{i.\ \ni}$, se tiene:

i) $\bar{z} = re^{-i.}$,

ii) $z \bullet z\ni = r \bullet r\ni e^{i(.\ +.\ \ni)}$,

iii) $\dfrac{z}{z\ni} = \dfrac{r}{r\ni} e^{i(.\ -.\ \ni)}$,

iv) $z^n = r^n e^{in.}$,

v) $\sqrt[n]{z} = w = s\ e^{i.}$ con $s = \sqrt[n]{r}$ y $. = \dfrac{.\ + 2k\pi}{n}$ $k = 0,1,2,...,n\text{-}1$.

2.4. Polinomios en **R** y en **C**

Al introducir el cuerpo de los números complejos, se ha decidido construir un nuevo número i que diera solución a la ecuación $x^2 + 1 = 0$. El cuerpo de los números complejos verifica una propiedad más amplia: dan solución a las ecuaciones polinómicas de cualquier grado. El teorema se llama Teorema fundamental del Álgebra y su enunciado se precisará enseguida.

El objetivo de esta sección es, pues, estudiar los polinomios con coeficientes reales y complejos, en particular su factorización. Especial atención merecen los polinomios reales, y así nos ocuparemos de averiguar cómo son sus raíces complejas no reales y cuáles son los factores simples reales. Finalmente, exponemos el modo de descomponer en suma de fracciones simples una fracción racional con coeficientes reales.

Designaremos por **K** tanto el cuerpo **R** como el cuerpo **C**.

Raíces de un polinomio

Los polinomios con coeficientes en **K** verifican el *Algoritmo de Euclides*, es decir: «Dados dos polinomios p, q con coeficientes en **K**, y $q \neq 0$, existen dos únicos polinomios c y r, también con coeficientes en **K**, que se llaman cociente y resto tales que:

1.- $p = q \bullet c + r$

2.- $r = 0$ o grado(r) < grado(q) ».

Si $r = 0$, se dice que p se *descompone* en producto de los polinomios q y c.

Un polinomio p, con coeficientes en **K**, se dice *irreducible* si las únicas descomposiciones de p en producto de dos polinomios, con coeficientes en **K**, son aquellas en las que uno de dichos polinomios es una constante. Ejemplo trivial de polinomio irreducible son los de grado 1.

Definición: Se dice que r. **K** es *raíz* del polinomio p. $\mathbf{K}[x]$ si $p(r)=0$, o, equivalentemente, si $p(x)=(x-r)q(x)$ siendo q. $\mathbf{K}[x]$.

Definición: Se dice que r. **K** es *raíz múltiple de orden h (h=2,3,4,...)* del polinomio p. $\mathbf{K}[x]$ si $p(x)=(x-r)^h \bullet q(x)$, siendo q. $\mathbf{K}[x]$ y $q(r)$. 0.

De forma inmediata se deduce que el conocimiento de las raíces de un polinomio permitirá determinar una descomposición del mismo en factores en $\mathbf{K}[x]$. De esto nos ocuparemos en el siguiente apartado.

Teorema fundamental del Álgebra

Todo polinomio de coeficientes en **C** de grado n admite n raíces complejas (cada una contada tantas veces como indique su multiplicidad). Por tanto, si p. $\mathbf{C}[x]$ y $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ son sus raíces complejas, podemos escribir

$$p(x)=a \bullet (x-z_1) \bullet (x-z_2) \cdots (x-z_n),$$

siendo a el coeficiente director de p.

Consideramos necesario destacar el caso particular de los polinomios p con coeficientes en **R,** para los que el Teorema fundamental del Álgebra garantiza que tiene n raíces complejas; sólo en algunos casos algunas o todas de estas raíces son reales.

Propiedad: Si r. $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ es raíz del polinomio real $p(x)$, también es raíz $\bar{r}$. $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Además, con el mismo orden de multiplicidad.

Dem. En efecto, si p. $\mathbf{R}[x]$, es decir, $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ con a_i. **R** $0=i=n$, y r es raíz de $p \Rightarrow a_0+a_1r+\cdots+a_{n-1}r^{n-1}+a_nr^n=0$.

Aplicando conjugación $a_0+a_1\bar{r}+\cdots+a_{n-1}\bar{r}^{n-1}+a_n\bar{r}^n=0$.

Descomposición de un polinomio en factores simples

Los únicos polinomios irreducibles en $\mathbf{R}[x]$ son los de primer grado y aquellos de segundo grado ax^2+bx+c que tienen discriminante negativo, $\sqrt{b^2-4ac}<0$.

Todo polinomio $p.\ \mathbf{R}[x]$ de grado n y coeficiente director a admite descomposición única en la forma:

$$p(x) = a \bullet (x - r_1)^{n_1} \cdots (x - r_h)^{n_h} \bullet (x^2 + s_1 x + t_1)^{m_1} \cdots (x^2 + s_k x + t_k)^{m_k}$$

donde todos los coeficientes son reales y los exponentes naturales tales que $n = n_1 + \cdots + n_h + 2(m_1 + \cdots + m_k)$.

Ejemplo: Mostramos la descomposición en $\mathbf{C}[x]$ de dos polinomios: $x^5 + (3-2i)x^4 + (2-6i)x^3 - (2+6i)x^2 - (3+2i)x - 1 = (x-i)^2 \bullet (x+i)^3$, y $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x+i)^2 \bullet (x-i)^2 \bullet (x-1)$; éste último, como polinomio en $\mathbf{R}[x]$, tiene la siguiente descomposición única en $\mathbf{R}[x]$: $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x^2+1)^2 \bullet (x-1)$.

Descomposición de un cociente de polinomios en suma de fracciones simples

Una fracción racional de coeficientes reales $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se dice *fracción racional propia* si el grado de $P(x)$ es estrictamente menor que el grado de $Q(x)$. Por otro lado, se dice que $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es *irreducible* si el numerador y el denominador no tienen raíces comunes. Supongamos en lo que sigue que $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una fracción racional propia e irreducible; si esto no ocurre así, comentaremos más adelante la forma de proceder.

La descomposición en fracciones simples de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ está inducida por la factorización del denominador. Según el tipo de factores simples asociados a $Q(x)$, es decir, según el tipo de raíces que tenga, aparecen unas fracciones simples u otras.

$x = r$ es una raíz real de multiplicidad k de $Q(x)$

En este caso, $Q(x) = (x-r)^k q(x)$ con $q(r).\ 0$ y se tiene la descomposición

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-r)^k} + \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_k$. **R** y $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es irreducible.

$x = a + bi$ es una raíz compleja de multiplicidad *m* de $Q(x)$

En este caso, $x = a + bi$ y $x = a - bi$ son ambas raíces de $Q(x)$ de multiplicidad *m*, por lo que $Q(x) = ((x - a - bi)(x - a + bi))^m q(x) = \left(x^2 + rx + s\right)^m q(x)$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + r_1 x + s_1} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2 + r_1 x + s_1\right)^2} + \cdots + \frac{M_m x + N_m}{\left(x^2 + r_1 x + s_1\right)^m} + \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $M_1, M_2, \ldots, M_m, N_1, N_2, \ldots, N_m$. **R** y $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es irreducible.

Reiteramos el estudio anterior ahora para $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ hasta considerar todas las raíces de $Q(x)$. Al final obtenemos la descomposición $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Sea $Q(x) = a \bullet (x - r_1)^{n_1} \cdots (x - r_h)^{n_h} \bullet \left(x^2 + s_1 x + t_1\right)^{m_1} \cdots \left(x^2 + s_k x + t_k\right)^{m_k}$.

Entonces,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - r_1} + \frac{A_2}{(x - r_1)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - r_1)^{n_1}} + \frac{B_1}{x - r_2} + \frac{B_2}{(x - r_2)^2} + \cdots + \frac{B_k}{(x - r_2)^{n_2}} + \cdots$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + s_1 x + t_1} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2 + s_1 x + t_1\right)^2} + \cdots + \frac{M_m x + N_m}{\left(x^2 + s_1 x + t_1\right)^{m_1}} + \frac{O_1 x + R_1}{x^2 + s_2 x + t_2} + \cdots$$

Los escalares que aparecen en la descomposición se calculan sumando las fracciones del lado derecho de la ecuación e igualando los polinomios de los numeradores.

¿Qué ocurre si $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ no es propia? El Algoritmo de Euclides nos garantiza que $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, donde $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ sí es una fracción racional propia. La descomposición de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se obtendría aplicando lo anterior a $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$.

¿Y si $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es propia pero no es irreducible? En este caso existe al menos una raíz r común a $P(x)$ y $Q(x)$ con multiplicidad n y m, respectivamente, por lo que el cociente se puede simplificar dividiendo numerador y denominador por $(x-r)^s$, donde $s = min\{n, m\}$. Tras simplificar por todas las raíces comunes se obtiene una fracción propia e irreducible.

Ejemplos: La descomposición en fracciones simples de los cocientes de polinomios $\dfrac{x^2+2}{x^4+x^3-3x^2-5x-2}$, $\dfrac{x}{x^3-x^2+x-1}$, $\dfrac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{\left(x^2+2x+3\right)^2(x+1)}$ es:

En el primer ejemplo el polinomio $Q(x) = x^4+x^3-3x^2-5x-2$ se puede factorizar como $Q(x) = (x+1)^3(x-2)$.

$\dfrac{x^2+2}{x^4+x^3-3x^2-5x-2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{(x+1)^3} + \dfrac{D}{x-2}$, los escalares verifican $x^2+2 = A(x+1)^2(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x-2) + D(x+1)^3$, lo que implica que $A = -2/9, B = 1/3, C = -1, D = 2/9$ y se tiene que

$$\frac{x^2+2}{x^4+x^3-3x^2-5x-2} = \frac{-1}{(x+1)^3} + \frac{1/3}{(x+1)^2} + \frac{-2/9}{x+1} + \frac{2/9}{x-2}.$$

Para la fracción $\dfrac{x}{x^3-x^2+x-1}$ el denominador admite la siguiente factorización en polinomios irreducibles $x^3-x^2+x-1 = \left(x^2+1\right)(x+1)$ procediendo de igual modo

$$\frac{x}{x^3-x^2+x-1} = \frac{-x/2 + 1/2}{x^2+1} + \frac{1/2}{x-1},$$

Por último, el denominador de $\dfrac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{\left(x^2+2x+3\right)^2(x+1)}$ está ya factorizado en polinomios irreducibles.

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{\left(x^2+2x+3\right)^2(x+1)} = \frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2} + \frac{1}{x+1}.$$