

Tema 3.

Revisión de los vectores del espacio \mathbf{R}^3

Es obvio que estamos interesados en los vectores, pero ¿por qué? Para responder le pedimos al lector que recuerde si ha manejado o incluso si sigue manejando los vectores; suponemos que rápidamente acudirá a su mente que los ha necesitado para describir la posición y la velocidad de una partícula en movimiento o la fuerza de atracción gravitatoria o el campo de fuerzas eléctrico, etc. Es pues constatable que los vectores desempeñan un papel importante en Matemáticas, en Física, en Ingeniería y en muchos otros campos de la Ciencia.

Ya estamos acostumbrados a reconocer que los vectores del plano y del espacio tienen doble personalidad: la algebraica y la geométrica. En este tema haremos constante referencia a ambos aspectos. Nuestro objetivo es esencialmente repasar las ideas y métodos básicos de la Geometría y del Álgebra vectorial, por lo cual hemos optado por una exposición en la que prime la idea de repaso o resumen frente al desarrollo lógico de los conceptos y propiedades.

3.1. El espacio vectorial tridimensional \mathbf{R}^3

Dedicamos esta sección a recordar los vectores del espacio euclídeo \mathbf{R}^3 , especialmente las operaciones vectoriales y sus propiedades básicas. De paso, decimos cómo estas ideas pueden generalizarse al conjunto \mathbf{R}^n .

Definición: Un vector en \mathbf{R}^2 , en \mathbf{R}^3 o en \mathbf{R}^n es un conjunto ordenado de dos, tres o n números reales, respectivamente. Al número n se le llama a veces *tamaño del vector* y a los elementos del vector se les suele llamar *componentes*.

Por ejemplo, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es un vector de \mathbf{R}^2 , $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ lo es de \mathbf{R}^3 y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ es

un vector de \mathbf{R}^n . Según el contexto, escribiremos los vectores en forma de columna, o bien en forma de fila; así pondremos $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ o $\vec{a} = (1, -2)$. Como se ve, los vectores se denotan mediante letras con una flecha sobre ellas \vec{a} , \vec{b} , \vec{v} o, como haremos de ahora en adelante, mediante letras negritas \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{v} .

La representación gráfica de los vectores de tamaño 2 y de tamaño 3 se hace mediante segmentos dirigidos, es decir, mediante segmentos acabados en una punta de flecha. En este contexto geométrico, las tres características de un vector son: la longitud, la dirección y el sentido de dichos segmentos dirigidos. Hablando intuitivamente, la longitud del vector es la longitud del segmento, su dirección es la de la recta a la que pertenece y su sentido queda determinado por la punta de la flecha. El punto inicial del segmento dirigido se conoce como *punto origen o inicial del vector* y el punto final del segmento como *punto final del vector*.

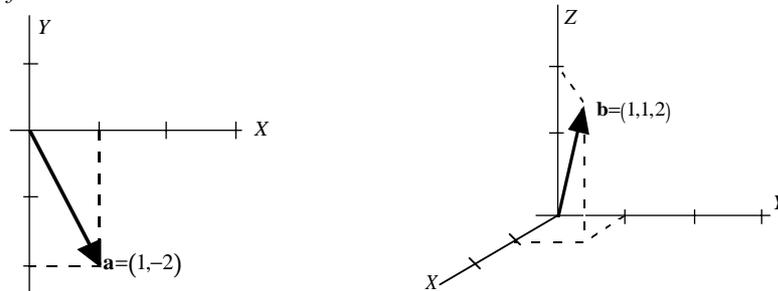


FIGURA 1: Representación gráfica de vectores en el plano y en el espacio.

La representación geométrica de vector como segmento dirigido es, desde luego, muy útil, pero si hemos de hacer cálculos con vectores es, en general, preferible usarlos considerados desde el punto de vista algebraico.

Antes de recordar las operaciones vectoriales conviene que explícitamente digamos qué se entiende por vectores iguales.

Definición: Dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} del mismo tamaño *son iguales*, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, si y sólo si sus componentes respectivas son iguales; o bien, cuando coinciden su longitudes, direcciones y sentido.

• *Operaciones vectoriales*

Definición de suma vectorial: La suma de los vectores $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ es otro vector $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ cuyas componentes son el resultado de sumar las correspondientes componentes de cada sumando $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$. Esta

definición algebraica se traduce geoméricamente diciendo: la suma de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} es el vector de la diagonal del paralelogramo que ellos determinan (véase la figura 2).

Definición de multiplicación por un escalar: Un múltiplo del vector $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ es otro vector $t\mathbf{a}$ cuyas componentes son el resultado de multiplicar

cada una de las componentes de \mathbf{a} por el número real t , es decir, $t\mathbf{a} = \begin{pmatrix} t a_1 \\ t a_2 \\ t a_3 \end{pmatrix}$.

De nuevo, la geometría dice que el vector $t\mathbf{a}$ es un vector de la misma dirección que \mathbf{a} , cuyo sentido será el mismo o el opuesto de \mathbf{a} según t sea positivo o no y, finalmente, su longitud es la de \mathbf{a} multiplicada por $|t|$ (véase la figura 2).

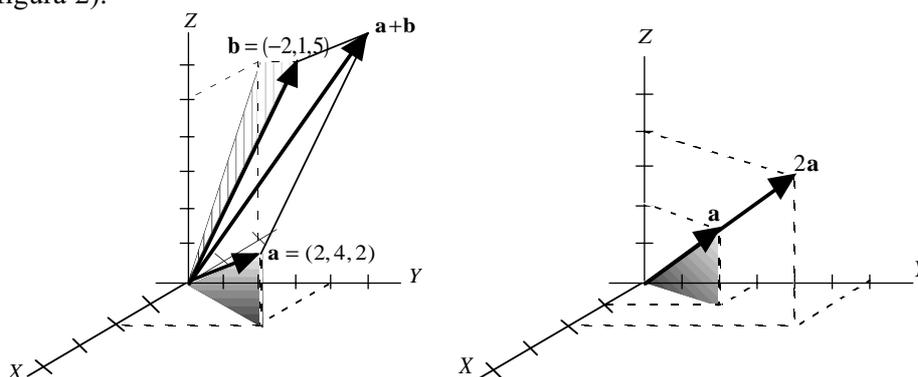


FIGURA 2: Representación gráfica de las operaciones vectoriales.

Mencionamos ahora algunos vectores importantes: por un lado, el vector nulo $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir, el vector cuyas componentes son todas cero; y, por otro lado, los vectores $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, que indican la dirección de los ejes coordenados de \mathbf{R}^3 .

Fácilmente adivinamos que el vector \mathbf{e}_k de \mathbf{R}^n es aquél cuyas coordenadas son todas cero salvo la que ocupa el lugar k -ésimo que vale uno.

Propiedades fundamentales: Sean \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} tres vectores del mismo tamaño y s y t dos números reales (escalares) cualesquiera:

1. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$. Ley asociativa
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$. Ley conmutativa
3. $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$. Elemento neutro de la suma
4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Vector opuesto
5. $t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. Ley distributiva
6. $(s + t)\mathbf{u} = s\mathbf{u} + t\mathbf{u}$. Ley distributiva
7. $(st)\mathbf{u} = s(t\mathbf{u}) = t(s\mathbf{u})$.
8. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Quizás no sea necesario señalarle al lector que las operaciones vectoriales gozan de más propiedades que no mencionamos, no porque no sean interesantes sino porque se deducen de las ocho de la lista anterior, que bien merecen el calificativo dado de fundamentales. De hecho, en el tema 12 estudiaremos con detalle los espacios en los que existen operaciones del tipo de las mencionadas suma y producto por un escalar en \mathbf{R}^3 , es decir, nos ocuparemos de los espacios vectoriales.

La ley asociativa nos permite escribir sin ambigüedad una expresión como $\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + 8\mathbf{v}_4$, en la que los vectores son del mismo tamaño, que es un ejemplo de combinación lineal de los cuatro vectores \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 y \mathbf{v}_4 . En definitiva, una combinación lineal es una suma de múltiplos escalares de vectores.

Definición: Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vectores del mismo tamaño y sean t_1, t_2, \dots, t_k escalares. El vector de la forma: $\mathbf{v} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \dots + t_k\mathbf{v}_k$ se llama *combinación lineal* de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ y los escalares t_1, t_2, \dots, t_k se llaman *coeficientes o pesos* de la combinación lineal.

Ejercicio 1: Calcula y dibuja las combinaciones lineales $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ y $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ de los vectores del plano $\mathbf{a} = (2, 3)$ y $\mathbf{b} = (3, -1)$.

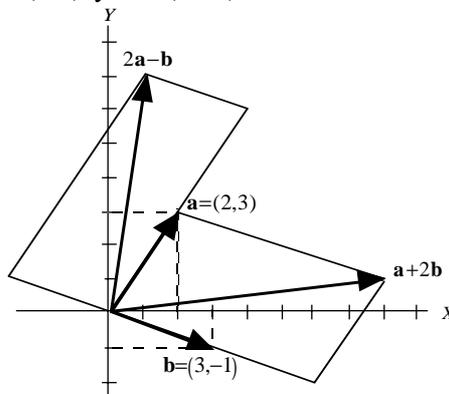


FIGURA 3: Representación gráfica de dos combinaciones lineales en el plano.

Para terminar esta primera sección hacemos un comentario sobre los adjetivos libre y fijo con que se puede calificar a un vector. Por un lado, la idea geométrica de vector que hemos dado, es decir, el segmento orientado que viene caracterizado no por su situación en el espacio sino por su longitud, dirección y sentido es conocido como *vector libre*. Sin embargo, un *vector fijo* o *vector posición* es aquel segmento orientado cuyo punto inicial es inamovible. Podemos decir, pues, que el conjunto de vectores fijos cuya longitud, dirección y sentido coinciden es un vector libre; o bien, que el vector fijo es un representante del vector libre.

3.2. Producto escalar y vectorial de dos vectores

No podemos limitarnos a recordar tan solo el aspecto «aritmético» de los vectores, hay algo más. En verdad, la geometría del plano y del espacio tiene

más atributos que nos faltan por definir: la longitud, la distancia, el ángulo, etc. Ahora bien, todas estas ideas se deducen de la que primero vamos a recordar: el producto escalar de dos vectores.

Definición: El *producto escalar de dos vectores* $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ es el siguiente número real:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

No hay ninguna objeción en generalizar esta definición al caso del espacio \mathbf{R}^n diciendo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$, que en este momento admitimos que es un producto escalar. Hemos de esperar hasta el tema 13 para conocer cuáles son los requisitos que se le exige al producto escalar para tener derecho a tal nombre y para estudiar los importantes espacios euclídeos.

Una vez decidido qué es el producto escalar ya podemos indicar cómo se miden longitudes y, en consecuencia, distancias y qué es el ángulo entre dos vectores. Empezamos con las longitudes y distancias:

1. La *norma, longitud o magnitud* de un vector \mathbf{u} se define como:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2},$$

o en general, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$.

2. La *distancia (euclídea)* entre \mathbf{u} y \mathbf{v} es:

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2},$$

o en general, $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$.

Obsérvese que $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{u}\|$.

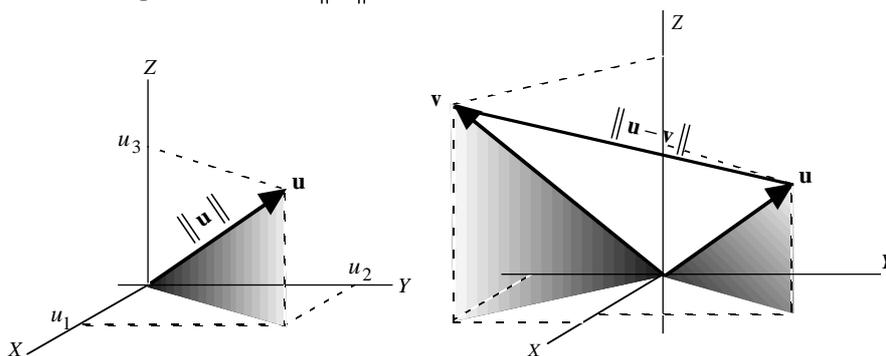


FIGURA 4: A la izquierda, la longitud de un vector y, a la derecha, la distancia entre dos vectores.

Para representar una dirección en el espacio se suele indicar el vector de esa dirección que tiene longitud uno. Así, el vector unitario \mathbf{u} en la dirección de un vector dado \mathbf{v} se construye como sigue: $\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}$. Los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} son los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados.

El siguiente paso es saber decidir si dos vectores son perpendiculares, para ello necesitamos otra conocida fórmula del producto escalar de dos vectores que lo relaciona con las longitudes de los factores y con el ángulo que forman. Es la siguiente: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$, siendo $\theta \in [0, \pi]$ el ángulo entre los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} .

Cuando aprendemos esa fórmula del producto escalar en la enseñanza secundaria, admitimos como lo más natural del mundo la idea de ángulo; desde luego así debe ser pues no es necesario en una enseñanza elemental abarcar toda la profundidad de un concepto. Pero en este texto llegará el momento en que necesitaremos hablar de ángulo y de perpendicularidad en otros conjuntos bien diferentes del plano y del espacio, y será imprescindible que el concepto de ángulo esté bien fundamentado. Con ese objetivo, deseamos indicar al lector que la clave de la idea de ángulo subyace en la muy importante *desigualdad de Cauchy-Schwarz*: $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$ cuya validez para cualesquiera dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} de \mathbf{R}^3 se puede verificar sin necesidad de acudir a ningún ángulo. De esta desigualdad se deduce la definición de ángulo entre dos vectores: el *ángulo entre los vectores* \mathbf{u} y \mathbf{v} , no nulos, es el único número $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|};$$

y, finalmente, se deduce la muy conocida fórmula del producto escalar:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta.$$

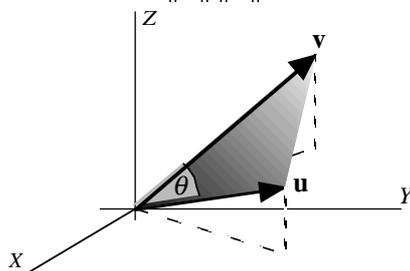


FIGURA 5: Ángulo entre dos vectores.

Detenemos un momento este repaso de ideas para dedicarnos a calcular algunos vectores y escalares en los siguientes ejercicios:

Ejercicio 2: Consideremos dos vectores del plano $\mathbf{a} = (2,5)$ y $\mathbf{b} = (4,-1)$.

1. Calculamos los productos escalares $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$ y $3\mathbf{a} \cdot (5\mathbf{b} + \mathbf{i})$:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = (6,4) \cdot (-6,7) = -8,$$

$$3\mathbf{a} \cdot (5\mathbf{b} + \mathbf{i}) = (6,15) \cdot (21,-5) = 51.$$

2. Ahora calculamos y comparamos los números reales $\|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\|$ y $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$:

$$\|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\| = \sqrt{29} - \sqrt{17} \approx 1.2621, \quad \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{40} \approx 6.3246.$$

3. ¿Cuál es el vector unitario de la misma dirección y sentido que \mathbf{b} ?

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{b}\|} \mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{17}} (4, -1) = \left(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{-1}{\sqrt{17}} \right).$$

4. ¿Cuál es el coseno del ángulo entre \mathbf{a} y \mathbf{b} ?

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{3}{\sqrt{29} \sqrt{17}} \approx 0.1351$$

5. ¿Y cuál es el ángulo entre \mathbf{a} e \mathbf{i} ?

$$\text{Como } \cos \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{i}\|} = \frac{2}{\sqrt{29}} \approx 0.3714,$$

$$\text{entonces } \beta = \arccos \frac{2}{\sqrt{29}} \approx \arccos 0.3714 \approx 1.19 \text{ radianes}$$

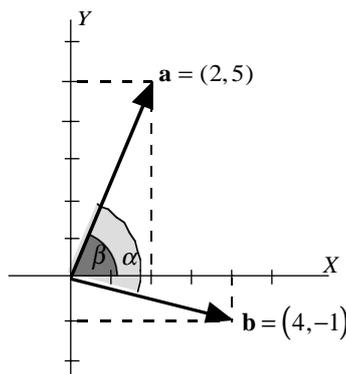


FIGURA 6: Ángulo entre los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , y entre los vectores \mathbf{a} e \mathbf{i} .

Ejercicio 3: Calculemos la distancia entre los puntos $A(5,-3,2)$ y $B(-1,-4,3)$ del espacio $dist(A,B)=\sqrt{6^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{38}\approx 6.1644$.

• *Dos criterios de perpendicularidad*

Definición: Dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} , no nulos, se dicen *perpendiculares* u *ortogonales* ($\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$) si el ángulo entre ellos es $\theta = \frac{\pi}{2}$.

— Un criterio de perpendicularidad: $\mathbf{u}\perp\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$.

— Otro criterio de perpendicularidad es el *Teorema de Pitágoras* que dice: «los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales si y sólo si $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ ».

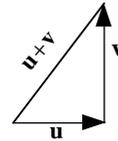


FIGURA 7: Teorema de Pitágoras

Pero, ¿cómo se calculan vectores perpendiculares a uno o varios dados? Recordamos en los siguientes ejercicios cómo podemos resolver el problema: en \mathbf{R}^2 de forma muy sencilla y en \mathbf{R}^3 con ayuda del producto vectorial.

Ejercicio 4: Para calcular un vector unitario ortogonal al vector del plano $\mathbf{a}=(2,5)$ basta invertir el orden de las componentes y cambiar el signo a una de ellas, así el vector $(5,-2)$ es un vector perpendicular al dado. Para conseguir que además sea unitario multiplicamos por el inverso de su norma

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{29}}(5,-2).$$

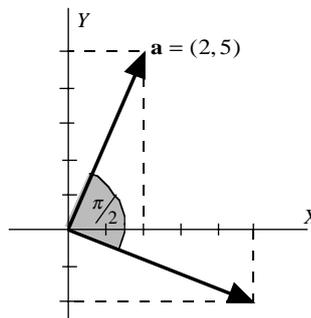


FIGURA 8: Construcción de vectores perpendiculares en el plano.

Ejercicio 5: Obtención de vectores perpendiculares en el espacio.

1. Calcula dos vectores del espacio perpendiculares entre sí y que sean perpendiculares a $\mathbf{v} = (1,1,0)$.

En el espacio, a veces, como en este ejemplo, una sencilla inspección geométrica del problema nos lleva a una de las soluciones. En efecto, como el vector $\mathbf{v} = (1,1,0)$ está en el plano XY, podemos localizar muy fácilmente dos vectores perpendiculares a él y que no sean colineales. Por un lado, el vector $\mathbf{w} = (1,-1,0)$, del plano XY, y por otro lado, el vector $\mathbf{k} = (0,0,1)$.

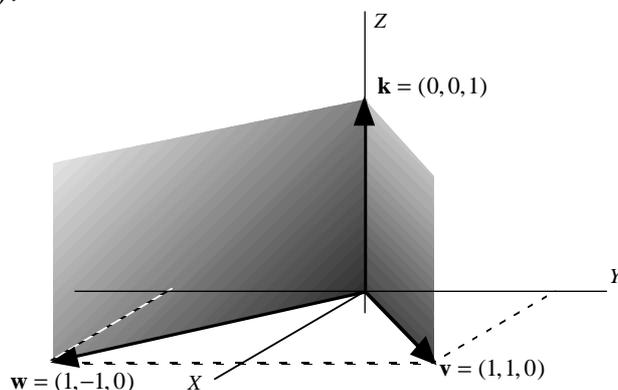


FIGURA 9: Dos vectores perpendiculares a $\mathbf{v} = (1,1,0)$.

2. Halla, usando el producto vectorial, un vector perpendicular a $\mathbf{u} = (2,2,-1)$ y también a $\mathbf{v} = (1,2,3)$.

En otras ocasiones, este ejemplo es una de ellas, para calcular un vector perpendicular a otros dos es necesario acudir a métodos sistemáticos de obtención de vectores perpendiculares. Una posibilidad es utilizar el *producto vectorial de los dos vectores* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ que es el vector siguiente:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{k}.$$

Esta construcción es más fácil recordarla si la expresamos usando la notación de determinantes:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

En el ejemplo propuesto, un vector perpendicular a $\mathbf{u} = (2,2,-1)$ y también

a $\mathbf{v}=(1,2,3)$ es su producto vectorial:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = (8, -7, 2).$$

Recordemos las características geométricas del vector resultante del producto vectorial de otros dos:

- La dirección del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es perpendicular al plano definido por \mathbf{u} y \mathbf{v} ;
- el sentido del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es tal que el sistema \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es dextrógiro;
- la longitud del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ admite las siguientes expresiones:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \quad (\text{identidad de Lagrange})$$

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta \quad (\text{siendo } \theta \text{ el ángulo entre } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v});$$

por cierto, que el resultado de la operación $\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$ produce el área del paralelogramo determinado por \mathbf{u} y \mathbf{v} .

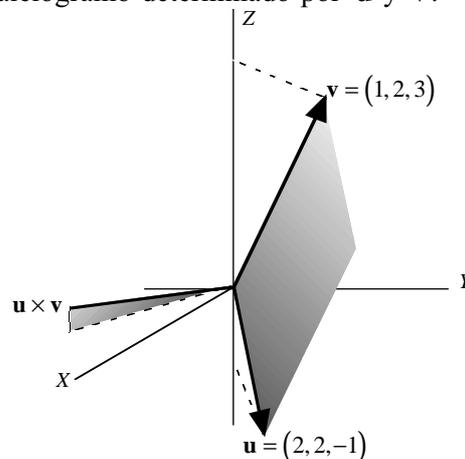


FIGURA 10: Vector perpendicular a otros dos.

• *Algunas propiedades del producto escalar*

Por último, señalemos que el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ tiene unas propiedades llamadas fundamentales que son:

Propiedades fundamentales del producto escalar:

1. Simetría: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. Aditividad: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. Homogeneidad: $t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (t\mathbf{v})$
4. Definida positiva: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ y, además, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Desigualdad del triángulo: Para cualesquiera dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} , tenemos

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

La lectura geométrica de esta desigualdad dice: «cada lado de un triángulo tiene su longitud menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados».

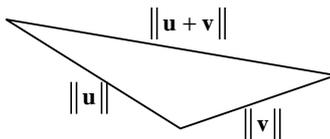


FIGURA 11: Relación entre las longitudes de los lados de un triángulo.

3.3. Circunferencias, esferas, rectas y planos.

• *Circunferencias y esferas:*

Una circunferencia (esfera) en el plano es una línea formada por todos los puntos $\mathbf{x} = (x, y)$ que están a la misma distancia $r > 0$ (radio) de un punto fijo $C(a, b)$ llamado centro. Esto significa que las coordenadas del punto verifican la ecuación:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

De modo análogo, una *esfera* en \mathbf{R}^3 , de centro $C(a, b, c)$ y de radio r , es el conjunto de puntos $\mathbf{x} = (x, y, z)$ que verifican la ecuación:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

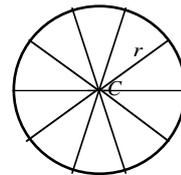


FIGURA 12: Una circunferencia.

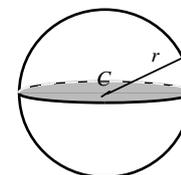


FIGURA 13: Una esfera.

Las definiciones anteriores admiten una generalización inmediata al caso del espacio \mathbf{R}^n y dice así: Una *esfera* en \mathbf{R}^n es el conjunto de puntos que están a la misma distancia $r > 0$ de un punto fijo $C(c_1, \dots, c_n)$. Por tanto, el punto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ pertenece a la esfera centrada en C y de radio r si y sólo si sus componentes verifican la ecuación: $(x_1 - c_1)^2 + \dots + (x_n - c_n)^2 = r^2$.

Ejercicio 6:

1. Escribe la ecuación de la esfera con centro en $C(-1, -4, 3)$ y tangente al plano XZ .

La distancia del centro al plano XZ ha de ser el radio de la esfera, es decir, el valor absoluto de la segunda componente del centro C : $r = 4$. Así pues, la ecuación de la esfera es: $(x+1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 16$.

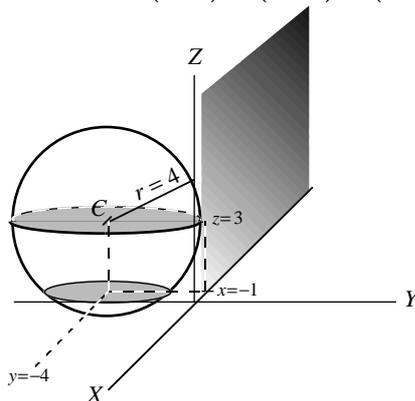


FIGURA 14: Esfera tangente al plano XZ.

2. Calcula el centro y el radio de la esfera de ecuación cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 6y - 8z + 10 = 0$.

Completando cuadrados se deduce: $(x-7)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 64$. Esta escritura de la ecuación de la esfera nos permite ver cuáles son las coordenadas del centro $C(7, -3, 4)$ y cuál es el valor del radio $r = \sqrt{64} = 8$.

3. Describe los puntos (x, y) del plano tal que el vector posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ verifique:
 - $\|\mathbf{r}\| = 2$. Es la circunferencia de centro $C(0, 0)$ y de radio $r = 2$.
 - $\|\mathbf{r} - \mathbf{i}\| = 2$. Es la circunferencia de centro $C(1, 0)$ y de radio $r = 2$.

- $\mathbf{r} \cdot \mathbf{i} = 2$. Es la recta vertical $x = 2$.
- $\mathbf{r} \cdot \mathbf{i} = \|\mathbf{r}\|$. Es el eje horizontal, o eje X, positivo.

• *Rectas en el plano y en el espacio*

Para describir los puntos de una recta en el espacio \mathbf{R}^3 necesitamos algunos datos de la misma. Supongamos, pues, que disponemos de su dirección: la del vector no nulo \mathbf{v} , y de un punto por el que pasa: $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$. En esta situación, los puntos $\mathbf{x} = (x, y, z)$ que estén en esa recta han de cumplir la ecuación:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \text{ donde } t \in \mathbf{R},$$

llamada *ecuación vectorial paramétrica* de la recta, con parámetro t . Es decir, $L = \{\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \text{ con } t \in \mathbf{R}\}$.

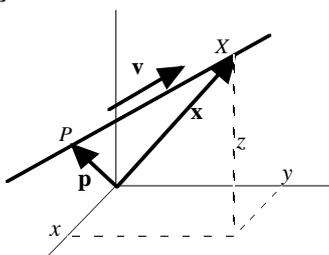


FIGURA 15: Recta de dirección \mathbf{v} y que pasa por el punto \mathbf{p} .

La ecuación vectorial paramétrica expresada en componentes da lugar a las llamadas *ecuaciones paramétricas* de la recta:
$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2, \text{ donde } t \in \mathbf{R}. \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases}$$

Estas ecuaciones también son válidas para rectas en el plano XY , donde se reducen a
$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2, \text{ para } t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Si eliminamos el parámetro t en las ecuaciones paramétricas, obtenemos la ecuación continua o simétrica de la recta. Están escritas a continuación.

En el plano:
$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}, \quad y - y_0 = \frac{v_2}{v_1}(x - x_0) = m(x - x_0).$$

En el espacio:
$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}, \quad \text{intersección de dos planos.}$$

Ejercicio 7: Dados los puntos $A(5,-3,2)$ y $B(-1,4,3)$ del espacio, calculamos:

- a. Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por A y B .

Podemos tomar $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (-6,7,1)$ como vector director de la recta y así, ya tenemos los datos necesarios para escribir unas ecuaciones paramétricas de la

$$\text{recta: } \begin{cases} x = 5 + (-6)t \\ y = -3 + 7t \\ z = 2 + t \end{cases} \text{ y la ecuación continua: } \frac{x-5}{-6} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-2}{1}.$$

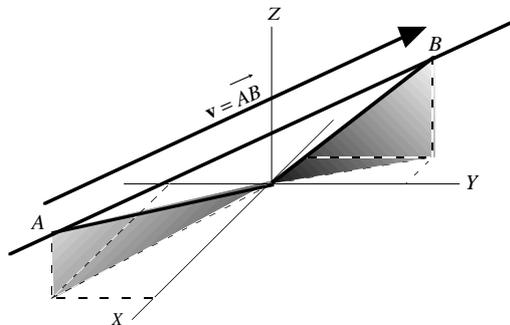


FIGURA 16: La recta que pasa por los dos puntos dados.

- b. La ecuación de la recta que pasa por B y es perpendicular al plano XZ .

Al ser $\mathbf{v} = \mathbf{j} = (0,1,0)$ perpendicular al plano XZ , también es un vector director de la recta.

Por tanto, unas ecuaciones paramétricas de la recta son

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 + t \\ z = 3 \end{cases}$$

y la ecuación continua:

$$\frac{x+1}{0} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{0},$$

donde la notación $\frac{x+1}{0}$ no

significa dividir por cero, más bien debe entenderse que es $x+1=0$.

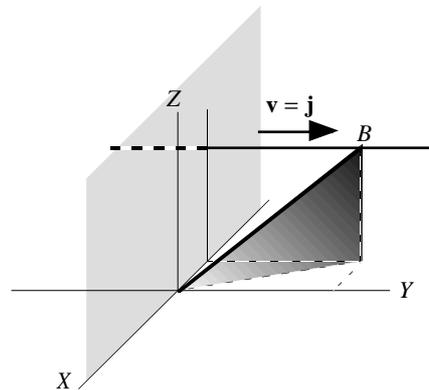


FIGURA 17: Representación de la recta que pasa por B y es perpendicular al plano XZ .

Las ecuaciones paramétricas de las rectas en el plano y en el espacio son en realidad los casos particulares de la *ecuación vectorial paramétrica* de una recta en \mathbf{R}^n . Es decir, la recta en \mathbf{R}^n que pasa por el punto $\mathbf{p}=(p_1,\dots,p_n)$ y tiene vector direccional \mathbf{v} está formada por los puntos $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ que cumplen la *ecuación vectorial paramétrica*, con parámetro t :

$$\mathbf{x}=\mathbf{p}+t\mathbf{v}, \text{ donde } t \in \mathbf{R}.$$

En componentes tenemos las ecuaciones paramétricas
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = p_1 + tv_1 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = p_n + tv_n \end{array} \right.,$$

donde $t \in \mathbf{R}$.

• *Planos en \mathbf{R}^3*

Ahora vamos a indicar las ecuaciones que han de cumplir los puntos de un plano del espacio tridimensional. Según sea la información que tengamos del plano podemos escribir dos ecuaciones diferentes: la ecuación vectorial paramétrica y la ecuación vectorial normal. Las comentamos en los siguientes puntos.

a. Ecuación vectorial paramétrica de un plano en \mathbf{R}^3 .

Conocemos los siguientes datos del plano: pasa por el punto $\mathbf{p}=(x_0,y_0,z_0)$ y es paralelo a los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} . Esto significa que el plano está formado por los puntos $\mathbf{x}=(x,y,z)$ que cumplen la *ecuación vectorial paramétrica* del plano: $\mathbf{x}=\mathbf{p}+s\mathbf{u}+t\mathbf{v}$, donde $s,t \in \mathbf{R}$ son los parámetros.

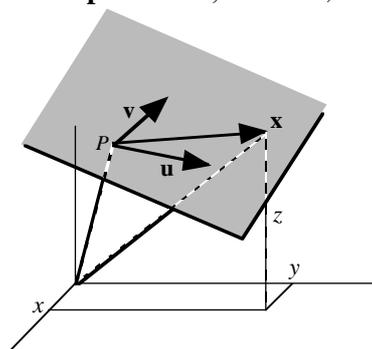


FIGURA 18: El plano generado por los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} , que pasa por el punto P .

De nuevo, esta ecuación expresada en componentes produce las ecuaciones

$$\text{paramétricas del plano: } \begin{cases} x = x_0 + su_1 + tv_1 \\ y = y_0 + su_2 + tv_2, \text{ donde } s, t \in \mathbf{R}. \\ z = z_0 + su_3 + tv_3 \end{cases}$$

- b. Ecuación vectorial normal de un plano en \mathbf{R}^3 . Ecuación general.
 Seguimos conociendo un punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ por el que pasa el plano y ahora la novedad es que conocemos un vector $\mathbf{n} = (A, B, C)$ perpendicular (o normal) al plano. En este caso, los puntos $X(x, y, z)$ están en ese plano si y sólo si verifican la *ecuación vectorial normal*: $(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0$.

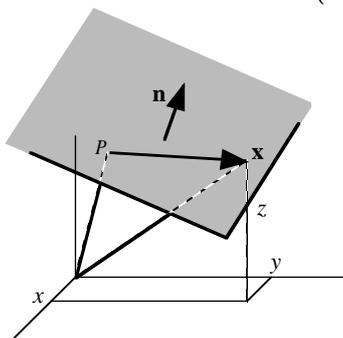


FIGURA 19: Plano perpendicular a un vector dado.

Esta ecuación vectorial normal se expresa en términos de las componentes como $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, o bien,

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

donde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Esta última ecuación se conoce como la *ecuación general* del plano.

Ejercicio 8: Dados los puntos $A(5, -3, 2)$ y $B(-1, 4, 3)$ del espacio, calcula:

- a. La ecuación del plano que pasa por A y tiene como vector normal \vec{AB} .

Una vez calculadas las componentes del vector normal $\mathbf{n} = \vec{AB} = (-6, 7, 1)$ podemos escribir ya la ecuación vectorial normal del plano:

$$-6(x - 5) + 7(y + 3) + (z - 2) = 0.$$

- b. La ecuación del plano que pasa por B y es paralelo al plano XZ .

De nuevo, siguiendo los pasos dados en el caso anterior, sólo es necesario

decidir qué vector normal al plano usaremos; el más sencillo es el vector $\mathbf{j}=(0,1,0)$. Una ecuación del plano es $0(x+1)+1(y-4)+0(z-3)=0$, es decir, $y=4$.

Lo cierto es que podríamos haber deducido esta ecuación de otra manera: como la ecuación del plano XZ es $y=0$, entonces cualquier plano paralelo tendrá por ecuación $y=b$; la constante b se determina imponiendo que pase por el punto $B(-1,4,3)$, lo cual obliga a que la ecuación del plano sea $y=4$.

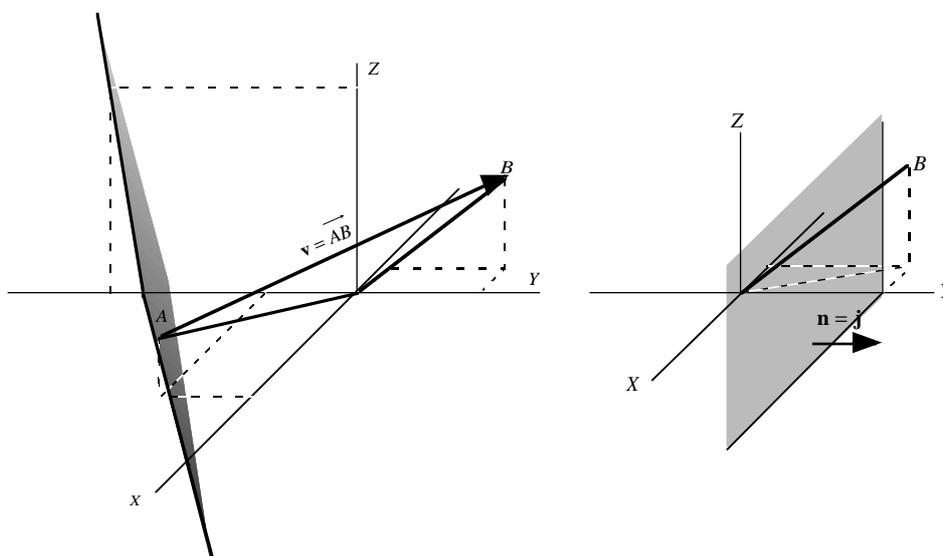


FIGURA 20: Los planos del ejercicio 8.

Ejercicio 9: Considera los planos $x+y+z=1$ y $4x-3z-15=0$. En los siguientes apartados vamos a dar los pasos oportunos para llegar a la ecuación de la recta intersección de ambos.

- Indica algún vector normal a cada uno de los planos: $\mathbf{u}=(1,1,1)$ y $\mathbf{v}=(4,0,-3)$ son vectores perpendiculares a los planos $x+y+z=1$ y $4x-3z-15=0$, respectivamente.
- Calcula un vector perpendicular a los dos anteriores: un vector perpendicular a \mathbf{u} y a \mathbf{v} simultáneamente es su producto vectorial:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

c. Comprueba que el punto $(6, -8, 3)$ está en ambos planos: en efecto, el punto $(6, -8, 3)$ verifica ambas ecuaciones: $6 + (-8) + 3 = 1$ y $4 \times 6 - 3 \times 3 - 15 = 0$. Por cierto que el punto $(6, -8, 3)$ se consigue al resolver el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos.

d. Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta intersección de ambos planos:

En los apartados anteriores tenemos la información necesaria para conocer esa recta: un vector director $\mathbf{w} = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y un punto por el que pasa $(6, -8, 3)$. En consecuencia, unas ecuaciones paramétricas de la

recta intersección de ambos planos son: $\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -8 + 7t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$; y por tanto, las

ecuaciones continuas: $\frac{x-6}{-3} = \frac{y+8}{7} = \frac{z-3}{-4}$.

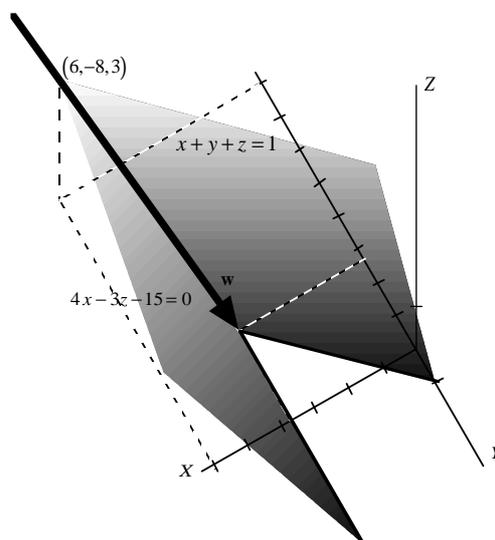


FIGURA 21: Los planos del ejercicio 9 junto con su recta intersección.

• *Planos e hiperplanos en el espacio \mathbf{R}^n*

En todo este tema de repaso hemos tratado de generalizar nuestras ideas geométricas al espacio \mathbf{R}^n y ahora nos toca generalizar las dos ecuaciones de un plano en \mathbf{R}^3 , que acabamos de recordar. Cada una de ellas nos conduce a diferentes «figuras» geométricas de \mathbf{R}^n . Veámoslo.

a. Ecuación vectorial paramétrica de un plano en \mathbf{R}^n .

Supongamos fijados de antemano un punto $\mathbf{p}=(p_1, \dots, p_n)$ de \mathbf{R}^n y dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} . El conjunto de puntos $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$ del espacio \mathbf{R}^n que verifican la ecuación $\mathbf{x}=\mathbf{p}+s\mathbf{u}+t\mathbf{v}$, donde $s, t \in \mathbf{R}$, se llama *plano*, por analogía a lo sucedido en \mathbf{R}^3 .

b. Ecuación vectorial de un hiperplano en \mathbf{R}^n . Ecuación general.

Ya hemos visto que los puntos $\mathbf{x}=(x, y, z)$ de un plano que pasa por el punto $\mathbf{p}=(x_0, y_0, z_0)$ y cuya normal es $\mathbf{n}=(A, B, C)$ deben satisfacer la ecuación $(\mathbf{x}-\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}=0$, porque \mathbf{n} y $\mathbf{x}-\mathbf{p}$ deben ser ortogonales.

El análogo de esta ecuación en \mathbf{R}^n es la *ecuación punto-normal de un hiperplano*. Así pues, si $\mathbf{n}=(a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$ y $\mathbf{p}=(p_1, \dots, p_n)$ la ecuación queda:

$$a_1(x_1 - p_1) + \dots + a_n(x_n - p_n) = 0.$$

Esta ecuación también puede escribirse como sigue: $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + d = 0$, que, de nuevo, se llama ecuación general de un hiperplano.

Por ejemplo, hiperplanos del espacio cuatridimensional son: $u+v+w+z=6$, $u+w+z=4$ y $u+w=2$, donde hemos designado las componentes de un vector o punto mediante (u, v, w, z) .