

Tema 4. Sistemas lineales: la eliminación gaussiana.

En este tema empezamos a ocuparnos del problema lineal cuyo enunciado matemático es: «*dada una matriz A de tamaño $m \times n$ y un vector de datos $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$, encontrar las soluciones $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ de la ecuación lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$* ». El lector ya se ha enfrentado a este problema en sus estudios previos y, en general, se le habrá propuesto que en la búsqueda de las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ utilice el método de eliminación de Gauss. Dedicamos la primera sección de este tema a recordar la mecánica de la eliminación gaussiana, que, en pocas palabras, consiste en transformar, mediante las llamadas operaciones elementales, el sistema lineal dado $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en otro equivalente triangular o escalonado $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$.

Una ecuación se dice lineal si en uno de los miembros de la igualdad aparece una combinación lineal de las incógnitas y en el otro una constante. Un sistema lineal es un conjunto de ecuaciones lineales, como por ejemplo

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

En la siguiente definición pretendemos que el lector compruebe que utiliza correctamente algunas de las palabras que se usan en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

Definición: Un *sistema lineal* de m ecuaciones con n variables (o incógnitas) x_1, x_2, \dots, x_n es un conjunto de m ecuaciones lineales de la forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

- Sobre las constantes del sistema: Los números $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}$ son los *coeficientes* del sistema. Los números b_1, b_2, \dots, b_m son los *términos constantes* (o términos independientes). Si todos los términos constantes son cero, el sistema se llama *homogéneo*.
- Significado de la palabra solución: Si los números s_1, s_2, \dots, s_n satisfacen las ecuaciones del sistema, es decir, si al sustituir $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ se verifican las igualdades del sistema, entonces se dice que s_1, s_2, \dots, s_n es una *solución* (o *solución particular*) del sistema. El conjunto de todas las soluciones de un sistema se llama *conjunto solución* o *solución general*.
- Los sistemas pueden tener o no soluciones: Un sistema lineal que tiene soluciones se dice que es *consistente* o *compatible*. En otro caso, se dice que el sistema es *inconsistente* o *incompatible*.

4.1. Interpretación de los sistemas lineales: por filas y por columnas. Número de soluciones de un sistema lineal

Un sistema de ecuaciones lineales puede ser entendido de dos formas distintas según el punto de vista desde el que se observe. Para ilustrar estas dos visiones utilizamos como ejemplo el sistema $\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 4x + 11y = 1 \end{cases}$.

Primera interpretación: Miramos por separado cada una de las ecuaciones del sistema, primero $2x + 4y = 2$ y después $4x + 11y = 1$. Cada ecuación representa una recta del plano XY y estas rectas se cortan en el punto solución del sistema que, en nuestro ejemplo, es $(3, -1)$. Ver la figura 1.

Por tanto, *la solución del sistema* es $x = 3$ e $y = -1$. En resumen, el sistema tiene una única solución, *sistema compatible determinado*, o bien, las

dos rectas se cortan en un solo punto.

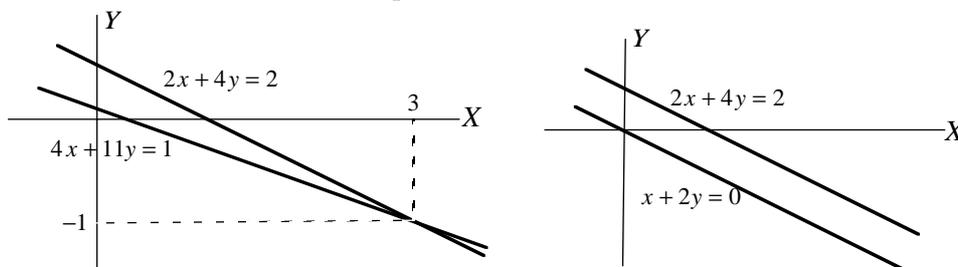


FIGURA 1: Un sistema compatible determinado y otro incompatible.

Un sistema lineal puede tener una, infinitas o ninguna solución. Modificando una de las ecuaciones del sistema anterior se ilustra geoméricamente las otras posibilidades.

El sistema $\begin{cases} 2x+4y=2 \\ x+2y=1 \end{cases}$ está formado por dos ecuaciones lineales que representan a la misma recta, luego el sistema tiene infinitas soluciones (los infinitos puntos de la recta). Se dice que el sistema es *compatible indeterminado*.

En cambio, el sistema $\begin{cases} 2x+4y=2 \\ x+2y=0 \end{cases}$ está formado por dos ecuaciones lineales que representan rectas paralelas. El sistema no tiene solución, es decir, el sistema es *incompatible*.

Segunda interpretación: Esta interpretación quizás sea menos conocida, aunque también es muy importante, y consiste en mirar las columnas del sistema en lugar de las filas.

Escribimos el sistema original en notación vectorial: $x \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir, al resolver el sistema se pretende calcular la combinación de los dos vectores del lado izquierdo que sea igual al vector de la derecha.

Geoméricamente se puede observar que si al triple ($x=3$) del primer vector se le añade el opuesto del segundo vector ($y=-1$), el resultado es el vector del segundo miembro, es decir: $3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

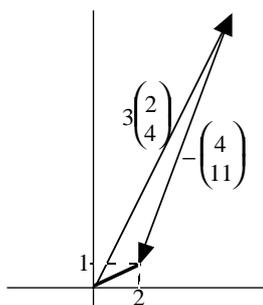


FIGURA 2: Un sistema lineal como combinación lineal de las columnas de coeficientes.

4.2. Cálculo de las soluciones de un sistema lineal: El método de eliminación gaussiana

La geometría es una ayuda para entender el problema subyacente en un sistema de ecuaciones lineales, pero el álgebra lo resuelve. Necesitamos un método sistemático para calcular la solución. La idea es muy sencilla y consiste en reducir el tamaño del problema de modo progresivo, eliminando una variable tras otra, hasta que sólo quede la última incógnita (triangulación o escalonamiento del sistema). Una vez determinado el valor de esta última incógnita, se va de regreso hacia las incógnitas anteriores obteniendo su valor (sustitución regresiva). Estamos hablando del algoritmo conocido como *eliminación gaussiana*, de probada eficiencia en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

En primer lugar, es necesario que notemos lo fácilmente que se resuelven los sistemas triangulares o escalonados. Vamos a comprobarlo resolviendo un par de sistemas lineales ya escalonados, de paso insistimos en las interpretaciones geométricas antes apuntadas e introducimos el concepto de *variables libres o parámetros* y de *variables básicas*.

Ejercicio 1: Resolvemos el sistema triangular superior:
$$\begin{cases} u + v + w = b_1 \\ v + w = b_2 \\ w = b_3 \end{cases} \text{ y}$$

comprobamos que la solución proporciona los coeficientes de la combinación lineal de las columnas de la izquierda para producir la columna de la derecha.

Efectivamente este sistema triangular es muy fácil de resolver, pues mediante la sustitución regresiva (de abajo hacia arriba) se llega a la solución:

$$\begin{cases} u = b_1 - b_2 \\ v = b_2 - b_3 \\ w = b_3 \end{cases} .$$

Mencionemos que este sistema lineal tiene una única solución, es decir, es un sistema compatible determinado.

Además, la solución conseguida son los coeficientes de la combinación lineal de las columnas de coeficientes que da lugar a la columna de los términos

independientes, es decir, $(b_1 - b_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (b_2 - b_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} .$

Ejercicio 2: Calculamos ahora la recta intersección de los siguientes

hiperplanos del espacio cuatridimensional:
$$\begin{cases} t=0 \\ z=0 \\ x+y+z+t=1 \end{cases}$$

El sistema que forman los tres hiperplanos es un sistema escalonado y se resuelve igual de fácil que el del ejercicio 1. En efecto, por sustitución progresiva, o bien al imponer las dos primeras igualdades en la tercera, nos queda:

queda:
$$\begin{cases} t=0 \\ z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$$
. Expresamos el conjunto solución en función de la variable

libre o parámetro x :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
. Se observa, pues, que la intersección

son los infinitos puntos de una recta.

Si imaginamos que el plano del papel son puntos del espacio cuatridimensional con tercera y cuarta componente nulas $\begin{cases} z=0 \\ t=0 \end{cases}$, entonces la recta solución se representa en la figura 3 de al lado.

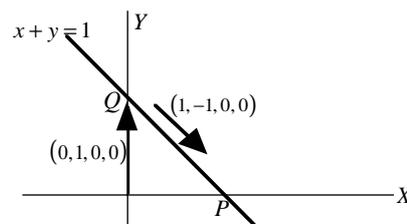


FIGURA 3: Representación de las soluciones del sistema del ejercicio 2.

La escritura de un sistema lineal se puede abreviar anotando sólo sus coeficientes y los términos constantes. Se disponen estos datos en forma de cuadro de tal modo que se mantenga el orden de las variables. Así por ejemplo,

el sistema
$$\begin{cases} u+v+w=2 \\ u+2v+3w=1 \\ v+2w=0 \end{cases}$$
 se puede resumir en el cuadro
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$
. Esta

disposición de los coeficientes y de los términos independientes se llama *matriz aumentada* del sistema lineal.

Ahora que ya hemos visto que los sistemas triangulares o escalonados se resuelven fácilmente, la cuestión es ¿se puede transformar cualquier sistema lineal en uno de ese tipo, conservando las mismas soluciones? La respuesta ya sabemos que es afirmativa y la forma de hacerlo bastante sencilla: eliminar las variables de las ecuaciones hacia abajo mediante las llamadas operaciones elementales.

Apliquemos el método al sencillo sistema $\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 6y = 18 \end{cases}$, cuya matriz aumentada es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & : & 0 \\ 3 & 6 & : & 18 \end{pmatrix}$. El número 1 de la esquina superior izquierda va a hacer el papel de *pivote*, pues un múltiplo suyo eliminará la entrada que está justo debajo de él; en este caso, basta restar de la segunda ecuación la primera multiplicada por tres, para llegar al nuevo sistema $\begin{cases} x - y = 0 \\ 9y = 18 \end{cases}$, o bien en forma de matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 9 & : & 18 \end{pmatrix}$.

Es habitual simplificar la última ecuación dividiéndola por 9 y así tener el sistema triangular: $\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$, o matricialmente $\begin{pmatrix} 1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 1 & : & 2 \end{pmatrix}$. El segundo pivote ha aparecido ahora; se trata del coeficiente 1 en la segunda ecuación.

Por último, la sustitución regresiva, de abajo hacia arriba, conduce a la solución del sistema: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$.

Aspectos importantes en el método de Gauss:

1. Ha aparecido la idea de *pivote* y *columnas pivote*.
2. La transformación de un sistema lineal en otro triangular o escalonado equivalente (con las mismas soluciones) tiene lugar mediante tres tipos de operaciones a las que llamamos *operaciones elementales* y que son:
 - Intercambiar dos ecuaciones.
 - Multiplicar una ecuación por una constante no nula.
 - Cambiar una ecuación por la que resulta de restarle un múltiplo de otra.
3. La solución del sistema triangular o escalonado se obtiene por *sustitución regresiva*.

En los ejemplos siguientes aplicamos la eliminación gaussiana a sistemas lineales. En el primero de ellos tratamos sólo con sistemas cuadrados (el mismo número de ecuaciones que de incógnitas), dejando para los siguientes los sistemas de cualquier tamaño.

Vuelve a utilizarse la idea de parámetros o variables libres y variables básicas, así como la escritura de un sistema lineal en forma vectorial, que tanto interés tiene.

Ejercicio 3: Resolvemos dos sistemas lineales cuadrados

1. Usamos la eliminación gaussiana para reducir el sistema
$$\begin{cases} 2u - 3v = 3 \\ 4u - 5v + w = 7 \\ 2u - v - 3w = 5 \end{cases} \quad a$$

una forma triangular, y así calcular sus soluciones.

El proceso de eliminación gaussiana y la sustitución regresiva está indicado a continuación en la forma matricial:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{\text{(fila 2.ª}-2 \cdot \text{fila 1.ª} \rightarrow \text{fila 2.ª}) \\ \text{fila 3.ª}-\text{fila 1.ª} \rightarrow \text{fila 3.ª}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \xrightarrow{\text{(fila 3.ª}-2 \cdot \text{fila 2.ª} \rightarrow \text{fila 3.ª})} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \xrightarrow{\text{(Sustitución)}} \begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \\ w = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(El símbolo \rightarrow indica que pasamos de una matriz a otra por medio de las operaciones elementales indicadas).

Los pivotes del proceso de eliminación han sido: 2, 1 y -5 , y el sistema
$$\begin{cases} 2u - 3v = 3 \\ 4u - 5v + w = 7 \\ 2u - v - 3w = 5 \end{cases}$$
 tiene una única solución, es decir, el sistema es

compatible determinado y, por ello, la matriz cuadrada de los coeficientes

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$
 se dice que es una matriz regular.

2. Estudiamos ahora las soluciones de los siguientes sistemas cuadrados:

$$\begin{cases} v - w = 0 \\ u - v = 0, \\ u - w = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} v - w = 1 \\ u - v = 1, \\ u - w = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} v - w = 2 \\ u - v = 2. \\ u - w = 4 \end{cases}.$$

Los tres sistemas lineales tienen los mismos coeficientes, sólo cambian los términos constantes. Por tanto, el proceso de eliminación gaussiana se ha de aplicar de igual manera en los tres casos. Resolvámoslos, pues, simultáneamente:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & : & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & : & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & : & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{(fila 1.ª} \leftrightarrow \text{fila 2.ª)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & : & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & : & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & : & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \\
& \xrightarrow{\text{(fila 3.ª} - \text{fila 1.ª} \rightarrow \text{fila 3.ª)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & : & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & : & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & : & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \\
& \xrightarrow{\text{(fila 3.ª} - \text{fila 2.ª} \rightarrow \text{fila 3.ª)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & : & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & : & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Sólo hay dos pivotes en la eliminación: 1 y 1, que están colocados en la primera y segunda columna, son, pues, las columnas pivote. Puesto que sólo hay dos pivotes, la matriz cuadrada de los coeficientes $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es singular.

— El sistema homogéneo $\begin{cases} v - w = 0 \\ u - v = 0 \\ u - w = 0 \end{cases}$ es equivalente a $\begin{cases} u - v = 0 \\ v - w = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$.

Tiene, por tanto, infinitas soluciones que expresamos tomando w como variable libre o parámetro, así $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Obsérvese que se han

dejado como variables básicas las correspondientes a las columnas pivote.

— Ahora, el segundo sistema $\begin{cases} v - w = 1 \\ u - v = 1 \\ u - w = 1 \end{cases}$ es equivalente a $\begin{cases} u - v = 1 \\ v - w = 1 \\ 0 = -1 \end{cases}$,

que no tiene solución, es pues un sistema lineal inconsistente o incompatible.

— Y, finalmente, el sistema $\begin{cases} v - w = 2 \\ u - v = 2 \\ u - w = 4 \end{cases}$ es equivalente a $\begin{cases} u - v = 2 \\ v - w = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$.

Tiene, pues, infinitas soluciones que expresadas de nuevo en función del parámetro w son: $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Compárese con la solución del sistema homogéneo, ¿qué se observa?

Ejercicio 4: Calculamos las soluciones del sistema rectangular

$$\begin{cases} x + y - 2z + 4t = 5 \\ 2x + 2y - 3z + t = 3. \\ 3x + 3y - 4z - 2t = 1 \end{cases}$$

Vamos a comprobar que se trata de un sistema compatible con un número infinito de soluciones.

En efecto, aplicamos la eliminación gaussiana

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & : & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & : & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & : & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{(fila 2.ª}-2\cdot\text{fila 1.ª}\rightarrow\text{fila 2.ª}) \\ \text{(fila 3.ª}-3\cdot\text{fila 1.ª}\rightarrow\text{fila 3.ª})}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & : & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & : & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & : & -14 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \xrightarrow{\text{fila 3.ª}-2\cdot\text{fila 2.ª}\rightarrow\text{fila 3.ª}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & : & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & : & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Sustitución}} \begin{cases} x = -9 + 10t - y \\ z = -7 + 7t \end{cases}. \end{aligned}$$

y observamos que sólo hay dos pivotes: 1 y 1, situados en las posiciones (1,1) y (2,3), luego las columnas pivote son la primera y la tercera, y por eso usamos como variables básicas x y z . Las variables libres o parámetros son las otras dos: y , t . Así pues, la solución general en forma vectorial es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ es decir un plano en el espacio } \mathbf{R}^4.$$

Ejercicio 5: Nos preguntamos si los cinco planos definidos por las ecuaciones

$$\begin{cases} -x + \quad \quad z = -2 \\ 2x - y + z = 1 \\ -3x + 2y - 2z = -1 \\ \quad x - 2y + 3z = -2 \\ 5x + 2y + 6z = -1 \end{cases} \text{ pasan por el mismo punto.}$$

Usamos el método de eliminación gaussiana para decidir si el sistema tiene soluciones, es decir, si los cinco planos pasan por algún punto común.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & : & -2 \\ 2 & -1 & 1 & : & 1 \\ -3 & 2 & -2 & : & -1 \\ 1 & -2 & 3 & : & -2 \\ 5 & 2 & 6 & : & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{(fila 2.ª}-(-2)\cdot\text{fila 1.ª}\rightarrow\text{fila 2.ª}) \\ \text{fila 3.ª}-3\cdot\text{fila 1.ª}\rightarrow\text{fila 3.ª}}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & : & -2 \\ 0 & -1 & 3 & : & -3 \\ 0 & 2 & -5 & : & 5 \\ 0 & -2 & 4 & : & -4 \\ 0 & 2 & 11 & : & -11 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \xrightarrow{\text{(fila 3.ª}-(-2)\cdot\text{fila 2.ª}\rightarrow\text{fila 3.ª})} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & : & -2 \\ 0 & -1 & 3 & : & -3 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 \\ 0 & 0 & -2 & : & 2 \\ 0 & 0 & 17 & : & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{(fila 4.ª}-(-2)\cdot\text{fila 3.ª}\rightarrow\text{fila 4.ª}) \\ \text{fila 5.ª}-17\cdot\text{fila 3.ª}\rightarrow\text{fila 5.ª}}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & : & -2 \\ 0 & -1 & 3 & : & -3 \\ 0 & 0 & 1 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La reducción a la forma escalonada ha llevado a un sistema triangular, una vez eliminadas las filas nulas, cuya solución es $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$. Por cierto, los pivotes son -1 , -1 y 1 .

Ejercicio 6: El sistema homogéneo $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ tiene soluciones no triviales.

En efecto, la matriz de coeficientes del sistema homogéneo se reduce a forma escalonada en una sola operación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(fila 2.ª - fila 1.ª} \rightarrow \text{fila 2.ª)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

siendo los pivotes 1 y -2 y las columnas pivote la primera y la segunda. Tomando, pues, z como parámetro las infinitas soluciones del sistema homogéneo son: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Elegimos una de esas soluciones no triviales: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y la usamos para expresar el sistema en forma vectorial: $-3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pensemos en el efecto que puede producir sobre el sistema el añadir una ecuación. Si, por ejemplo, añadimos la tercera ecuación lineal $2x + y = 0$, ¿cuáles son las soluciones del sistema lineal $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$? La respuesta la

tenemos una vez que hayamos reducido la matriz de coeficientes a una forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{(fila 2.ª - fila 1.ª} \rightarrow \text{fila 2.ª)} \\ \text{(fila 3.ª - 2 \cdot fila 1.ª} \rightarrow \text{fila 3.ª)} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(fila 3.ª - 1/2 fila 2.ª} \rightarrow \text{fila 3.ª)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

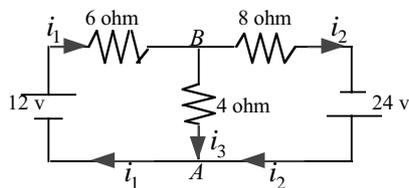
Ha resultado ser una matriz regular; y, en consecuencia, el sistema homogéneo propuesto tiene una única solución, la solución nula.

¿Cómo puede ser otra tercera ecuación lineal que al añadirla al sistema inicial produzca un sistema lineal con infinitas soluciones?: cualquiera que sea una combinación lineal de las dos dadas. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}, \text{ que es equivalente al sistema } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}, \text{ tiene infinitas}$$

soluciones: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Conviene que el lector las compare con las soluciones del sistema de partida.

Ejercicio 7: Vamos a calcular, usando las leyes de Kirchoff, las intensidades i_1 , i_2 e i_3 del siguiente circuito:



Leyes de Kirchoff:

- (a) Ley de intensidades: «La suma algebraica de todas las corrientes en cualquier nodo es cero».
- (b) Ley de voltaje: «La suma algebraica de todos los cambios de voltaje en cualquier circuito cerrado es cero».

En este ejemplo, a diferencia de los anteriores, no se dicen explícitamente las ecuaciones que han de verificar las incógnitas, luego el problema comienza en un estado anterior: debemos deducir el modelo lineal, y luego lo resolvemos como hemos ido haciendo hasta ahora.

Para deducir el modelo de este ejemplo es necesario aplicar las *leyes de Kirchoff*, que están enunciadas al lado del circuito, y, además, la *ley de Ohm* que establece: «al pasar una corriente por una resistencia R se produce una caída de voltaje v proporcional a la intensidad i : $v = Ri$ ».

De acuerdo con la primera ley de Kirchoff, $i_1 = i_2 + i_3$ para el nodo A (y lo mismo para el nodo B). Aplicando la segunda ley de Kirchoff al circuito de la izquierda se obtiene $6i_1 + 4i_3 = 12$; del mismo modo, el circuito de la derecha conduce a la ecuación $8i_2 - 4i_3 = 24$. Así pues, hemos obtenido el sistema lineal:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ 6i_1 + 4i_3 = 12 \\ 8i_2 - 4i_3 = 24 \end{cases}, \text{ o matricialmente, } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & : & 0 \\ 6 & 0 & 4 & : & 12 \\ 0 & 8 & -4 & : & 24 \end{pmatrix}$$

La aplicación del método de eliminación de Gauss conduce a la solución:

$$i_1 = \frac{30}{13} \approx 2.31, \quad i_2 = \frac{36}{13} \approx 2.77 \quad \text{e} \quad i_3 = -\frac{6}{13} \approx -0.46 \text{ amperios.}$$