

Tema 5.

Los conceptos básicos de las funciones reales de una variable real

El interés de la Matemática no queda reducido a los diversos conjuntos o espacios que estudia, sino que también se extiende a las relaciones que existen entre ellos. Este hecho es una consecuencia de lo que ocurre en el mundo físico. En cualquier fenómeno hay unas magnitudes que dependen de otras y que varían según éstas varíen. Por ejemplo, el volumen de un gas depende de la presión a la que está sometido; también es sabido que el área de un círculo depende del radio, $S = \pi r^2$ (si el radio r toma diversos valores numéricos, el área tomará también valores diferentes).

Esta idea se formulará introduciendo el concepto de función, y precisamente en este tema vamos a recordar las ideas básicas acerca de una clase muy particular de funciones, las funciones reales de variable real. A pesar de su carácter particular, el conocimiento de estas funciones es necesario, y casi diríamos que suficiente, para que, más tarde, se pueda estudiar cualquier tipo de funciones que se presenten.

Los orígenes de la noción de función y de su influencia en la evolución de la ciencia pueden fijarse en el siglo XVII. El concepto de función aparece explícitamente en Leibniz (1692) y es utilizado por los Bernoulli desde 1694. Euler (1707-1783) introdujo en 1734 el símbolo $f(x)$ y Clairaut fx . Sin embargo, la definición de función en los siglos XVII y XVIII se apoyaba en el modo de dar la correspondencia entre las variables, hasta que Dirichlet (1854) estableció el concepto general de función que hoy día manejamos.

5.1. Nociones generales sobre funciones reales de una variable real

Nuestro objetivo en esta sección es sencillamente recordar, con breves comentarios, conceptos y propiedades que el lector ya conoce pero que conviene tener a mano por si es necesario realizar alguna consulta. Las

secciones que tratamos son:

1. ¿Qué es una función? Su representación gráfica.
2. Función lineal: velocidad, pendiente.
3. Las funciones exponenciales y logarítmicas. Sus gráficas.
4. Tipos de funciones: simétricas, monótonas, acotadas e inversas.
5. Funciones trigonométricas. Oscilaciones.
6. Inversas de las funciones trigonométricas.
7. Funciones hiperbólicas.
8. Problemas propuestos.

¿Qué es una función? Su representación gráfica

Ilustramos la idea de función mediante el ejemplo ya mencionado en los comentarios de la introducción. Recordémoslo: «el área de un círculo depende del radio, $S = \pi r^2$ ». Lo cual significa que cada entrada en el valor de r produce una salida o valor del área S . Así

en el $\left\{ \begin{array}{l} \text{entrada } 2 \rightarrow \text{función } S \rightarrow \text{salida } 4\pi \\ \text{dominio } \left\{ \begin{array}{l} \text{entrada } r \rightarrow \text{función } S \rightarrow \text{salida } \pi r^2 \end{array} \right\}$ en el recorrido

Definición: Una *función f real de variable real* es una «ley» (regla) que asigna un único número real (salida) a cada número real (entrada) del dominio.

O bien, una función es un conjunto de pares $(x, f(x))$ de números reales en el que no aparecen dos pares con el mismo valor de x . Los pares son ordenados porque escribimos x antes que $f(x)$.

Conviene que destaquemos la parte dinámica de esta definición, que quizá sea lo más importante en la práctica. Hemos dicho que el número $f(x)$ se produce a partir del número x . Cuando x *cambia*, $f(x)$ puede *cambiar*. El Cálculo se ocupa precisamente de estudiar la relación entre ambos cambios.

Recalcamos ahora los nombres:

- El conjunto de entradas de la función f se llama *dominio de f* :
$$Dom(f) = \{x \in \mathbf{R} : \text{existe } f(x)\} .$$
- El conjunto de salidas de la función f se llama *recorrido de f* :
$$R(f) = \{y \in \mathbf{R} : \text{existe } x \in Dom(f) \text{ con } f(x) = y\} .$$
- La única salida y correspondiente a una entrada x se suele denotar por $f(x) = y$, que leemos « f de x » o « y es la imagen de x mediante f ».

Ejemplos:

1. La función valor absoluto: $f(x) = |x|$.

El dominio de esta función es \mathbf{R} . Y los números del intervalo $[0, +\infty)$ constituyen su recorrido.

2. La función escalón (o función de Heaviside): $U(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

De nuevo, el dominio de esta función es \mathbf{R} y su recorrido son dos números: el 0 y el 1.

• La representación gráfica

En general, cada función tiene una gráfica. La *representación gráfica de una función* consiste en dibujar cada uno de los pares $(x, f(x))$, cuando $x \in D$, en el plano cartesiano. El primer elemento del par, la entrada x , es la abscisa y el segundo, la salida y , es la ordenada.

Observación: La gráfica de una función no puede contener más de un punto situado sobre la misma vertical.

Ejemplos: En la figura 1 aparece, a la izquierda, la gráfica de la función $y = |x|$ y, a la derecha, la de la función escalón.

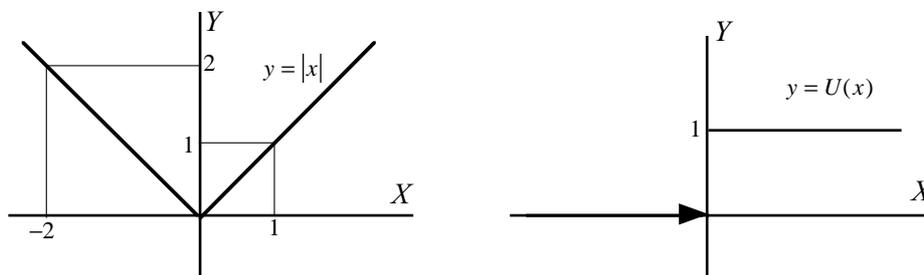


FIGURA 1: Gráfica de la función módulo y de la función escalón unitario.

La gráfica da idea de la variación de la función y en ella se aprecian las propiedades fundamentales de continuidad, existencia de tangentes, concavidad... El estudio analítico de una función y la representación gráfica de la misma están unidos por un camino de doble sentido, pues el conocimiento de uno de ellos lleva al otro, y viceversa. Aprovecharemos las facilidades gráficas que nos proporcionan hoy día las calculadoras y los ordenadores para disponer de un conocimiento inmediato de las características básicas de una función.

Una curiosidad: La función de Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ es un ejemplo

de función imposible de representar gráficamente y que muestra cuán amplia es la definición de función.

• *Algunas formas de expresar una función*

Casi siempre una función vendrá dada por la *expresión analítica* que define la ley o regla, es decir, por el conjunto de operaciones matemáticas que se han de realizar con los elementos x del dominio para obtener los valores $f(x)$.

Por ejemplo: $f(r) = \pi r^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

En estos casos, se entenderá que el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales r o x para los cuales tiene sentido la expresión analítica. Así, en los ejemplos anteriores:

$$\text{Dom}(f) = \mathbf{R}, \quad \text{Dom}(g) = [0, +\infty), \quad \text{Dom}(h) = \mathbf{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

Observación. A veces surge la necesidad de considerar no todo el dominio natural de definición de la función, sino parte de él. Así, el área S de un círculo de radio r se expresa mediante la fórmula dada en la primera función f : $S = f(r) = \pi r^2$. Al considerar esta fórmula geométrica, el dominio de definición de dicha función es el intervalo $(0, +\infty)$; mientras que el dominio de definición natural es el intervalo $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$.

Casi siempre manejaremos funciones expresadas analíticamente; ahora bien, es conveniente recalcar que hay otras formas de expresar funciones. En concreto, mencionamos la *forma tabular de expresar una función*, que consiste en un cuadro de dos líneas, en una de las cuales se anotan distintos valores de x y en la otra, los valores correspondientes de la y .

X	x_1	x_2	x_n
Y	y_1	y_2	y_n

Esta forma es la usada habitualmente para transcribir los resultados del estudio experimental de fenómenos.

Ejercicios:

1. Calculamos el dominio de $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$ y de $g(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$.

El dominio de $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$ es el conjunto de números reales que no anulan el denominador, es decir, los números reales negativos. Así,
 $Dom(f) = \{x \in \mathbf{R} : x - |x| \neq 0\} = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\} = (-\infty, 0)$.

El dominio de $g(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$ es:
 $Dom(f) = \{x \in \mathbf{R} : -x \geq 0 \text{ y } 2+x > 0\} = \{x \in \mathbf{R} : x \leq 0 \text{ y } x > -2\} = (-2, 0]$.

2. Conocida la gráfica de $y = \sqrt{x}$, representemos gráficamente la función $f(x) = \sqrt{x-2}$. Al restar dos unidades a la variable horizontal x , la gráfica se traslada hacia la derecha precisamente dos unidades. La gráfica está en la figura 2.

3. Conocida la gráfica de $y = |x|$, es fácil representar gráficamente la función $f(x) = |x| - 2$. En efecto, al restar dos unidades a las distancias verticales y , la gráfica se mueve hacia abajo precisamente dos unidades. Véase la gráfica en la figura 2.

4. Si $f(x) = \frac{x}{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, vamos a calcular las salidas o imágenes mediante funciones resultado de combinar estas dos:

- $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = \frac{0}{0-1} + \sqrt{1-0^2} = 1$.

En general, $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x}{x-1} + \sqrt{1-x^2}$, cuyo dominio es $[-1, 1)$.

- $(f \cdot g)(0) = f(0) \cdot g(0) = \frac{0}{0-1} \cdot \sqrt{1-0^2} = 0$.

En general, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x}{x-1} \cdot \sqrt{1-x^2}$, cuyo dominio es $[-1, 1)$.

- $\left(\frac{g}{f}\right)(t) = \frac{g(t)}{f(t)} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\frac{t}{t-1}} = \frac{(t-1)\sqrt{1-t^2}}{t}$, $Dom\left(\frac{g}{f}\right) = [-1, 1) \setminus \{0\}$.

- $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f\left(\sqrt{1-(-1)^2}\right) = f(0) = \frac{0}{0-1} = 0$.

En general, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}-1}$,

cuyo dominio es $[-1, 1] \setminus \{0\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$.

- $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g\left(\frac{0}{0-1}\right) = g(0) = \sqrt{1-0^2} = 1.$

En general, $(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x-1}\right)^2}$, cuyo dominio es $(-\infty, 0] \cup [5, \infty)$.

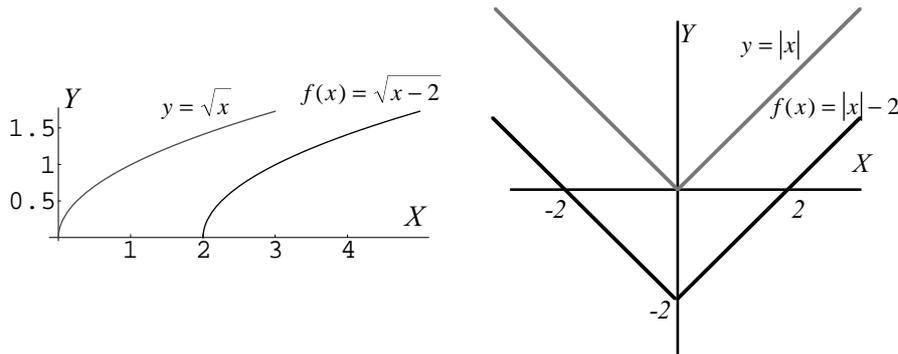


FIGURA 2: Gráficas de las funciones de los ejercicios 2 y 3.

Función lineal: velocidad, pendiente

Vamos a empezar con un ejemplo que es familiar; se trata de observar el velocímetro y el cuentakilómetros de un automóvil. El primero nos da la velocidad v , medida en kilómetros por hora, y el segundo nos informa de la distancia f , en kilómetros, recorrida hasta el momento. La relación entre v y f es lo que le interesa al Cálculo.

El caso más sencillo se da cuando la velocidad es fija, constante, por ejemplo, $v = 50$ (km/h). Basta multiplicar el tiempo transcurrido t por la velocidad $v = 50$ para conocer el espacio recorrido $f(t) = vt = 50t$ (esta relación sólo usa el álgebra). Decimos que f crece linealmente con el tiempo y que su gráfica es una línea recta. Geométricamente, la velocidad es la pendiente de la gráfica del espacio.

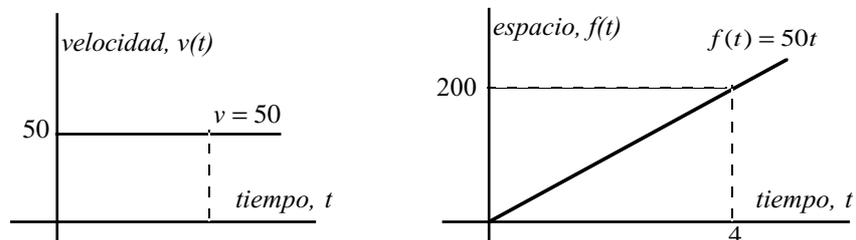


FIGURA 3: Función velocidad constante y su función espacio recorrido.

Mencionemos ahora que toda función lineal tiene una expresión del tipo $f(t) = vt + C$. Su gráfica es una línea recta y v es la pendiente. La constante C traslada la recta hacia arriba o hacia abajo y es el valor del punto inicial de la línea (en $t = 0$). Cuando v es negativo, la gráfica de f es una línea descendente.

Ciertamente, el caso que hemos repasado, v una constante, es el más sencillo pero nuestro trabajo será tratar con velocidades que no sean constantes.

Ejercicios:

1. ¿Cuál es la función lineal f que verifica $f(0) = 3$ y $f(2) = 11$?

La constante C de $f(t) = vt + C$ es el valor de f en $t = 0$: $C = f(0) = 3$.

La pendiente v es el cambio en f dividido por el cambio en t :

$$v = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 4.$$

Así pues, $f(t) = 4t + 3$.

2. Si un movimiento, que comienza en el origen O , tiene velocidad $v = 8$ hasta el instante T y después $v = -2$, ¿cuando regresa f al 0? Da las fórmulas de $v(t)$ y de $f(t)$.

Para regresar al 0, necesitamos que, a partir del instante T , transcurra un tiempo $4T$. Es decir, se vuelve al 0 en el instante $5T$,

$$\text{La expresión analítica de } v(t) \text{ es } v(t) = \begin{cases} 8, & \text{si } t < T \\ -2, & \text{si } t > T \end{cases}.$$

$$\text{La expresión analítica de } f(t) \text{ es } f(t) = \begin{cases} 8t, & \text{si } t < T \\ -2(t - T) + 8T, & \text{si } t > T \end{cases}.$$

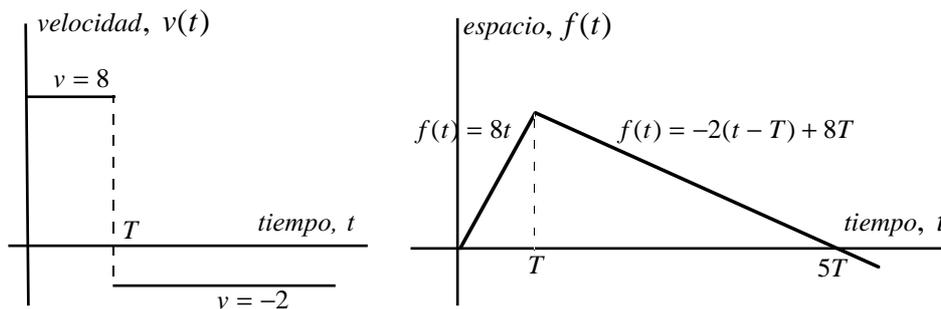


FIGURA 4: Gráficas de la velocidad y del espacio del ejercicio 2.

Las funciones exponenciales y logarítmicas. Sus gráficas

• Las funciones exponenciales

El objetivo ahora es comprender las exponenciales como 2^x , 10^x y sobre todo e^x . La importancia de esta función e^x en las ciencias físicas, en la economía, en la ingeniería y en tantas otras materias obliga a manejarla cuanto antes, sin esperar a su definición matemática rigurosa.

Comenzamos indicando la notación que se usa. Escribimos $f(x) = a^x$ para indicar la función exponencial de base el número a , constante positiva, y cuyo exponente x es la variable independiente.

Los números a^n , $n \in \mathbf{N}$, son sencillamente $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$, donde el factor a está repetido n veces. También son necesarias las potencias de exponente negativo, y así $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Acordamos poner que $a^0 = 1$. Cuando el exponente es una fracción $x = \frac{n}{m}$, la definición es $a^x = \sqrt[m]{a^n}$.

Por último, la definición de a^x para valores no racionales del exponente x no la necesitamos, de momento, y nos conformamos con saber que se pueden obtener valores aproximados de a^x aproximando el número x mediante un número decimal.

Propiedades: Las propiedades esenciales de esta función son:

1. La función exponencial es siempre positiva: $a^x > 0$ para todo x .
2. Para $a > 1$, se tiene: $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$.
3. Para $0 < a < 1$, tenemos: $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$.
4. Cualesquiera que sean los números reales x e y :

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}.$$

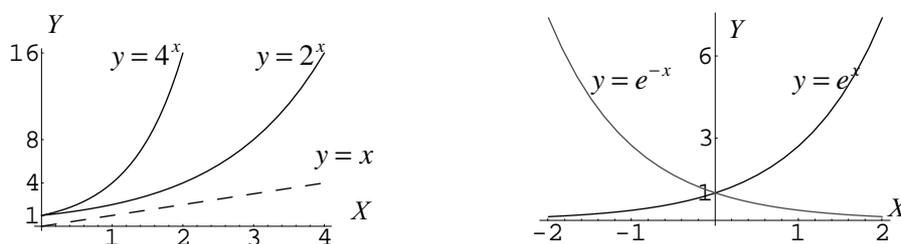


FIGURA 5: Algunas funciones exponenciales.

En la figura 5 están dibujadas algunas funciones exponenciales y especialmente la más importante de todas: la de base el número e , $y = e^x = \text{Exp}(x)$, llamada exponencial natural.

• *Las funciones logarítmicas*

Una frase para refrescar la memoria: los logaritmos, en base 10, de los números 10 y 10^2 y 10^3 son los exponentes.

Definición: Si a es un número positivo, $a \neq 1$, el *logaritmo en base a de un número $x > 0$* es el exponente de la igualdad $a^y = x$. Escribimos $y = \log_a x$.

Observación. La función exponencial y la logarítmica de la misma base son inversas entre sí. Esto quiere decir que la acción de la función logarítmica es anulada por la de la exponencial, y viceversa. Queda escrito en estas fórmulas:

$$\log_a a^x = x, \quad a^{\log_a x} = x.$$

Propiedades: Las principales propiedades de las funciones logarítmicas son:

1. La función logarítmica $y = \log_a x$ sólo está definida para $x > 0$.
2. $\log_a 1 = 0$ (al ser $a^0 = 1$) y $\log_a a = 1$ (al ser $a^1 = a$).
3. Como $a^x a^y = a^{x+y}$ (se suman los exponentes), se tiene

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v.$$

4. Como $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ (se restan los exponentes), tenemos:

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v.$$

5. Al ser $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ (se multiplican los exponentes), se cumple:

$$\log_a(u^v) = v \log_a u.$$

6. Cambio de base: $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$, para todo $x > 0$.

Comprobemos esta igualdad. Sea $y = \log_a x$, o lo que es lo mismo $a^y = x$.

Tomamos logaritmos en base b y resulta $y \cdot \log_b a = \log_b a^y = \log_b x$, de donde, $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$.

En particular, si $x = b$, entonces $1 = \log_b b = \log_a b \cdot \log_b a$, es decir,

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}.$$

Al igual que en el caso de las funciones exponenciales, la realidad hace que la base logarítmica más importante sea la del número e . El logaritmo de base e se llama *logaritmo natural* o *logaritmo neperiano*. Hay también una

notación especial: $\ln x$ o $\text{Ln}x$.

Dibujamos ahora algunas funciones logarítmicas, y especialmente la más importante de todas, que es la de base el número e , $y = \text{Ln}x$, cuya gráfica se obtiene aplicando a la gráfica de $y = e^x$ (su inversa) una simetría respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

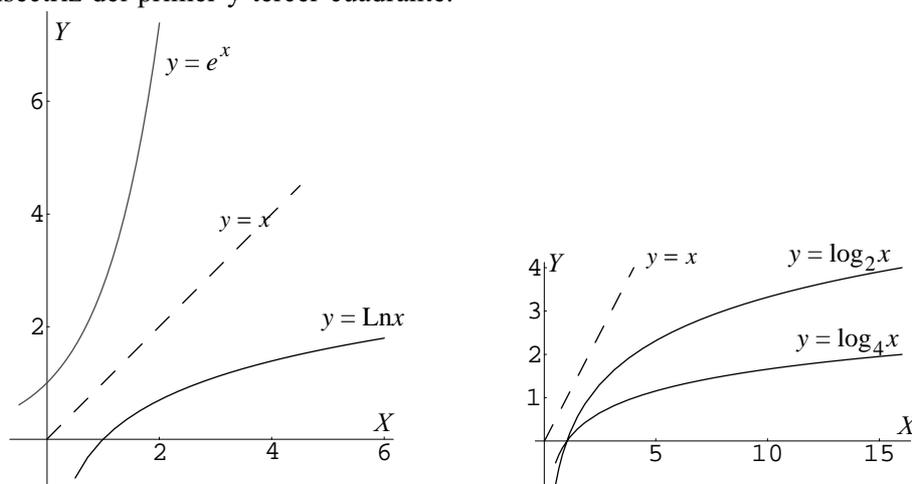


FIGURA 6 : Algunas funciones logarítmicas.

Dos observaciones:

- Cualquier logaritmo, de base a , puede obtenerse a partir de los logaritmos neperianos. Basta aplicar la fórmula del cambio de base: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.
- Obsérvese que cualquier exponencial puede obtenerse de la exponencial natural, ya que $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln a}$.

Tipos de funciones: simétricas, monótonas, acotadas e inversas

- *Las funciones simétricas: pares e impares*

Supongamos que el dominio D de una función f es simétrico respecto al 0, es decir, $x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Definición:

1. La función f se llama función *par o simétrica respecto al eje Y* si cumple $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$.

2. La función f se llama función *impar* o *simétrica respecto al origen* O si cumple $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

Ejemplos: Sea n un número natural. Las funciones $f(x) = x^{2n}$ son pares y las funciones $f(x) = x^{2n-1}$ son impares.

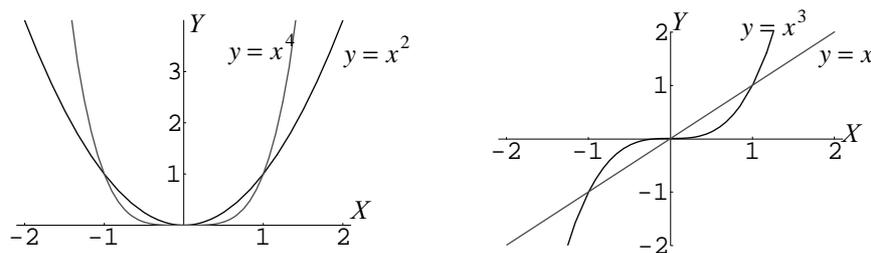


FIGURA 7 : Dos funciones pares $y = x^2$, $y = x^4$ y dos funciones impares $y = x$, $y = x^3$.

• *Las funciones monótonas: crecientes y decrecientes*

Una importante clase de funciones es la de las funciones monótonas. Las ideas están en la siguiente definición.

Definición: Sea f una función real de variable real y S un subconjunto del dominio de la función.

1. f es *creciente* en S si $\forall x, y \in S$ con $x < y$, se tiene $f(x) < f(y)$ (es decir, las imágenes crecen al crecer la variable independiente).
2. f es *decreciente* en S si $\forall x, y \in S$ con $x < y$, se tiene $f(x) > f(y)$ (es decir, las imágenes decrecen al crecer la variable independiente).

Ejemplos:

1. Si n es un número natural par, entonces las funciones $f(x) = x^n$ son decrecientes en $(-\infty, 0]$ y crecientes en $[0, +\infty)$.
2. Si n es un número natural impar, entonces las funciones $f(x) = x^n$ son crecientes en \mathbf{R} .
3. La función exponencial $y = e^x$ es creciente (en su dominio), al igual que toda función exponencial $y = a^x$ cuya base $a > 1$. Por el contrario, $y = a^x$ es decreciente si la base es $0 < a < 1$.
4. La función logaritmo neperiano es creciente. Del mismo modo que en el ejemplo anterior, la función $y = \log_a x$ es creciente si $a > 1$; en cambio, $y = \log_a x$ es decreciente si $0 < a < 1$.

• *Las funciones acotadas. Máximo y mínimo de una función*

Ahora vamos a considerar el recorrido de la función o conjunto de salidas. Nos interesa destacar si pueden ser muy grandes o muy pequeñas estas salidas y, en especial, si hay alguna salida máxima o alguna mínima. La definición y el vocabulario vienen a continuación.

Definición: Sea f una función real de variable real y S un subconjunto del dominio de la función.

1. f es acotada superiormente en S si existe un número real M tal que

$$f(x) \leq M, \quad \forall x \in S,$$

es decir, M no es superado por ninguna salida de la función f .

En este caso, M se llama *cota superior* de $f(S)$.

Una cota superior cualificada, que no siempre existe, es el máximo de f en S . Una cota superior M es el *máximo de f en S* si verifica que $M = f(x_{\max})$ para cierto valor $x_{\max} \in S$.

2. f es acotada inferiormente en S si existe un número real m tal que

$$m \leq f(x), \quad \forall x \in S,$$

es decir, todas las salidas de f procedentes de entradas en S son superiores a m .

En este caso, m se llama *cota inferior* de $f(S)$.

Una cota inferior cualificada, que no siempre existe, es el mínimo de f en S . Una cota inferior m es el *mínimo de f en S* si verifica que $m = f(x_{\min})$ para cierto valor $x_{\min} \in S$.

3. f es acotada en S si f es acotada superior e inferiormente en S . Esto significa que $f(S) \subseteq [m, M]$, donde m es una cota inferior de $f(S)$ y M una cota superior de $f(S)$.

Ejemplos:

1. La función $f(x) = x^2$ no es acotada superiormente pero sí es acotada inferiormente. Una cota inferior es el 0, valor que es también el mínimo de f ; de hecho, $f(0) = 0$.

2. La función escalón unitario o función de Heaviside $U(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es una función acotada. Además U alcanza el valor máximo 1 en cualquier número $x \geq 0$ y el valor mínimo 0 en cualquier número $x < 0$.

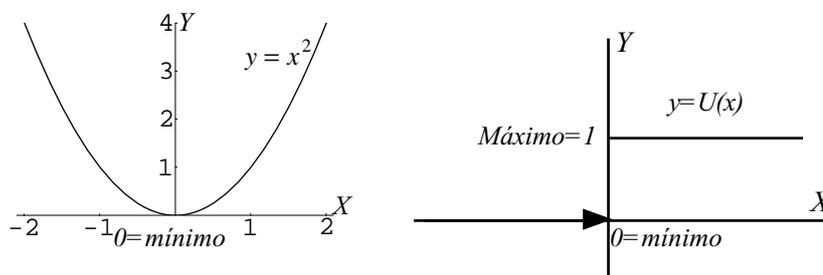


FIGURA 8: Máximo y mínimo de una función.

Antes de concluir este apartado queremos poner al lector con los pies en la tierra. Puede parecer, a causa de los ejemplos sencillos que hemos dado, que saber si una función es creciente o decreciente o calcular el máximo y el mínimo, si existen, de una función es una tarea de niño de escuela. ¡Nada más lejos! Necesitamos, en la mayoría de los casos, las poderosas herramientas del cálculo diferencial, y no siempre son garantía de éxito (dicho esto sin intención de desanimar a nadie).

• *Las funciones inversas*

Hay una idea muy importante que se expresa en una ecuación tan sencilla como ésta: $f(g(x)) = x$. ¿Qué significa esta ecuación? Simplemente, que comenzando con una entrada x cualquiera, por ejemplo, $x = 2$, calculamos $y = g(x)$, digamos que resulta $y = 7$. A continuación calculamos $f(y)$ y la respuesta debe ser x ; en el ejemplo la respuesta ha de ser $x = 2$. Es decir, lo que hace una función, lo deshace su función inversa.

La función inversa de g se escribe $f = g^{-1}$. Cuidado: ¡no es $\frac{1}{g(x)}$! Y la definición es la siguiente:

Definición: La función g^{-1} , *inversa de g* , es la función que verifica la relación $g^{-1}(g(x)) = x$ y también la relación simétrica $g(g^{-1}(y)) = y$.

Estas relaciones conllevan la siguiente propiedad: *El dominio de una función coincide con el recorrido de su función inversa*. Es decir, las entradas de g^{-1} son las salidas de g y también las entradas de g son las salidas de g^{-1} .

Ejemplos:

- La función inversa de $y = g(x) = x + 1$ es $x = g^{-1}(y) = y - 1$.
- La función inversa de $y = g(x) = 2x + 3$ es $x = g^{-1}(y) = \frac{y - 3}{2}$.

- La función inversa de $y = g(x) = \frac{2x-1}{3-x}$ es $x = g^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y+2}$.

¿Cómo se han calculado estas funciones inversas? Simplemente, se ha resuelto la ecuación $y = g(x)$ considerando x como incógnita. Así, en el segundo ejemplo, $y = 2x + 3$, despejando la variable x se obtiene $x = \frac{y-3}{2}$, que es la expresión de la función inversa g^{-1} .

En la sección anterior ya hemos mencionado dos funciones inversas importantes: la función exponencial y la logarítmica de la misma base. Escribámoslo de nuevo: $y = g(x) = a^x$, $x = g^{-1}(y) = \log_a y$.

Funciones trigonométricas. Oscilaciones

En este apartado repasamos las funciones trigonométricas, especialmente las funciones $\text{sen } t$ y $\text{cos } t$. El interés por estas funciones es debido a su aplicación a las rotaciones, vibraciones y oscilaciones. Son las funciones perfectas para describir los movimientos repetitivos.

- *Las funciones trigonométricas. Movimiento circular*

Recordemos la construcción geométrica de las funciones seno y coseno. Con centro en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, se traza una circunferencia de radio 1. Los ángulos se generan desde el eje positivo, que, al girar en el sentido contrario de las agujas del reloj, produce ángulos positivos; y, sin embargo, al girar en el sentido de las agujas del reloj, los ángulos se miden negativos. Es importante señalar que nos olvidamos de los grados para medir ángulos y usamos sólo los radianes. Un ángulo de x radianes es el que abarca un arco de circunferencia que mide una longitud $|x|$.

En el dibujo siguiente aparece un ángulo positivo de α radianes, el arco que abarca tiene una longitud α . Del mismo modo, un ángulo negativo de β radianes abarca un arco de longitud $|\beta|$.

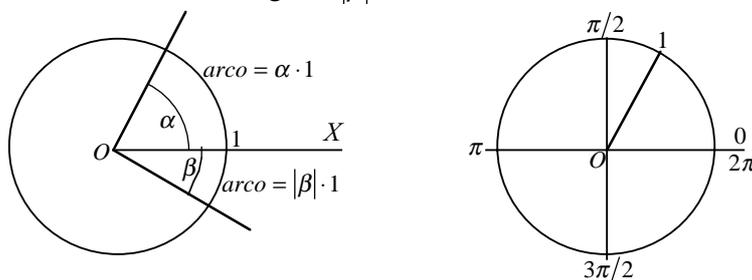


FIGURA 9: Ángulo y arco que abarca.

Definición: Se define el seno y el coseno trigonométrico del siguiente modo:

seno de $\alpha = \text{sen}\alpha =$ ordenada del punto P

coseno de $\alpha = \text{cos}\alpha =$ abscisa del punto P

Al ser $(\text{cos}\alpha, \text{sen}\alpha)$ las coordenadas del punto P , que está sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, debe verificarse: $(\text{cos}\alpha)^2 + (\text{sen}\alpha)^2 = 1$, que también se escribe $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$. Véase la figura 10.

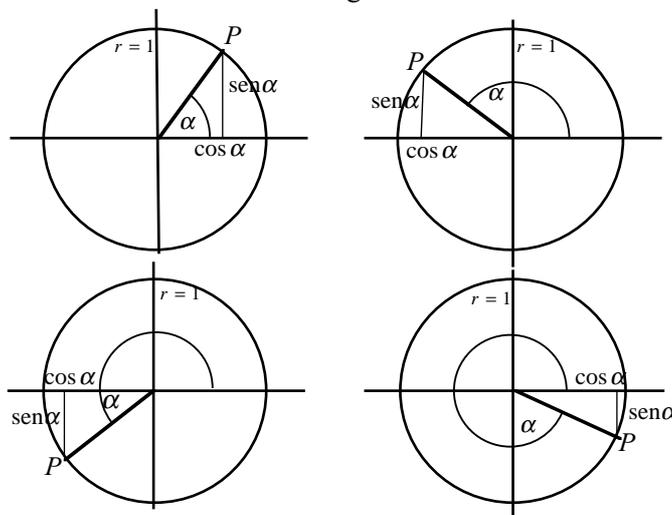


FIGURA 10: Gráfica del seno y el coseno de un ángulo de cada cuadrante.

Interpretemos ahora en términos dinámicos las funciones trigonométricas $\text{sen}t$ y $\text{cos}t$. Una pelota se mueve alrededor de una circunferencia de radio 1, centrada en el origen. La posición (x, y) de la pelota satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, ya que se mantiene sobre la circunferencia. Si especificamos la posición de la pelota usando el ángulo con la horizontal y sabemos que la pelota viaja con velocidad angular constante (el ángulo es igual al tiempo t) y que el movimiento realizado sobre la circunferencia en el sentido contrario a las agujas del reloj comienza en el eje X , entonces en el instante t se encuentra en la posición $x = \text{cos}t$ e $y = \text{sen}t$.

Definición: Las restantes funciones trigonométricas llamadas *tangente*, *cotangente*, *secante* y *cosecante* vienen definidas mediante las relaciones:

$$\tan x = \frac{\text{sen}x}{\text{cos}x},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\text{cos}x}{\text{sen}x},$$

$$\sec x = \frac{1}{\text{cos}x},$$

$$\text{cosec}x = \frac{1}{\text{sen}x}.$$

En la figura 11 se muestra la representación geométrica de la tangente de un ángulo de cada uno de los cuadrantes.

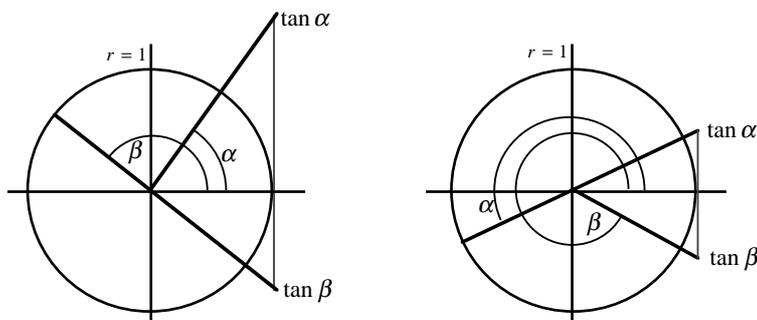


FIGURA 11 : Gráfica de la tangente de un ángulo de cada cuadrante.

• *Propiedades básicas y gráficas de las funciones trigonométricas*

Comenzamos estudiando la función $y = \text{sen}x$.

En primer lugar, el siguiente gráfico ilustra cómo pasar de la construcción geométrica del $\text{sen}x$ a la representación gráfica en un sistema de coordenadas cartesianas de la función $y = \text{sen}x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

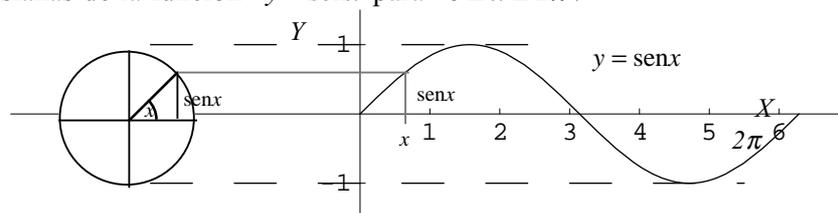


FIGURA 12: Gráfica de $y = \text{sen}x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

A continuación sólo mencionamos las propiedades básicas de esta función, que se deducen de la construcción geométrica. La segunda de ellas es necesaria para justificar la gráfica completa de $y = \text{sen}x$, que aparece tras las propiedades.

Propiedades:

1. La función $y = \text{sen}x$ es acotada. De su construcción se deduce que el valor máximo es 1, que se alcanza por ejemplo en $\frac{\pi}{2}$, y el valor mínimo -1 , alcanzado entre otros ángulos en $\frac{3\pi}{2}$. (Basta ver la gráfica anterior).
2. La función $y = \text{sen}x$ se repite cada 2π unidades (es periódica). Al girar y completar vueltas a la circunferencia, los ángulos que se van formando vuelven a tener el mismo seno.

3. La gráfica de la función $y = \text{sen}x$ es simétrica respecto al origen O , esto es, $y = \text{sen}x$ es una función impar. Basta observar que el ángulo de x radianes y el de $-x$ radianes interceptan a la circunferencia en puntos cuyas segundas coordenadas son opuestas entre sí.

La gráfica de $y = \text{sen}x$ tiene el siguiente aspecto:

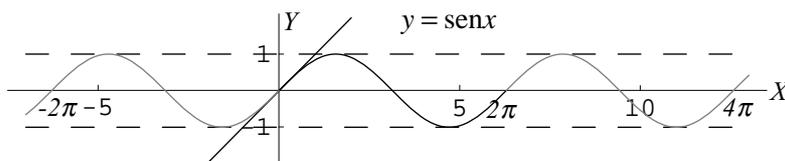


FIGURA 13: Gráfica de $y = \text{sen}x$.

Ahora, nos dedicamos a estudiar la función $y = \text{cos}x$.

La gráfica de esta función es tan parecida a la anterior que damos sin más dilación sus propiedades y su representación gráfica.

Propiedades:

1. La función $y = \text{cos}x$ es acotada. De su construcción se deduce que el valor máximo es 1, que se alcanza, por ejemplo, en 0, y el valor mínimo -1 , alcanzado entre otros ángulos en π .
2. La función $y = \text{cos}x$ se repite cada 2π unidades (es periódica). Al girar y completar vueltas a la circunferencia, los ángulos que se van formando vuelven a tener el mismo seno.
3. La gráfica de la función $y = \text{cos}x$ es simétrica respecto al eje Y , esto es, $y = \text{cos}x$ es una función par. Basta observar que el ángulo de x radianes y el de $-x$ radianes interceptan a la circunferencia en puntos cuyas abscisas son idénticas.

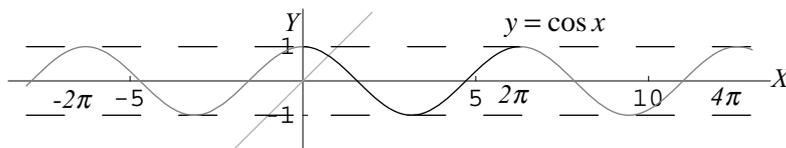


FIGURA 14: Gráfica de $y = \text{cos}x$.

La última función trigonométrica a la que le dedicamos unas líneas es $y = \text{tan}x$.

Esta función tiene un comportamiento diferente de las anteriores. Empezamos, pues, por pasar de la construcción geométrica de la $\text{tan}x$ a la

representación gráfica en un sistema de coordenadas cartesianas de la función $y = \tan x$ para $0 \leq x \leq \pi$, como se ve en este gráfico.

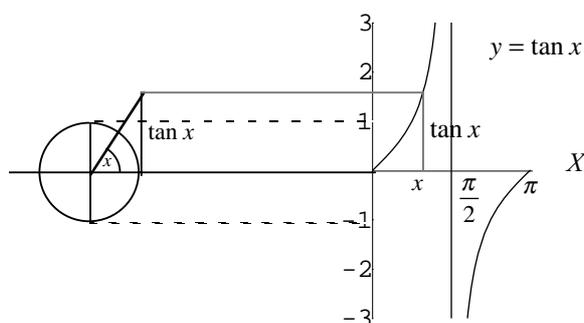


FIGURA 15: Gráfica de $y = \tan x$ en el intervalo de 0 a π .

Igual que para las anteriores, mencionamos las propiedades básicas de esta función, que se deducen de la construcción geométrica. De nuevo la segunda propiedad justifica la gráfica completa de $y = \tan x$ dibujada en la figura 16.

Propiedades:

1. Ahora la función $y = \tan x$ no es acotada. Basta ver la gráfica anterior.
2. La función $y = \tan x$ se repite cada π unidades (es periódica). Al girar y dar media vuelta a la circunferencia, los ángulos que se van formando vuelven a tener la misma tangente.
3. La gráfica de la función $y = \tan x$ es simétrica respecto al origen O , esto es, $y = \tan x$ es una función impar.

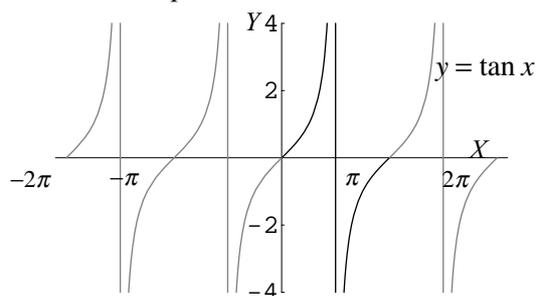


FIGURA 16: Gráfica de $y = \tan x$.

• *Las funciones periódicas*

Hemos observado que las tres funciones trigonométricas a las que hemos dedicado más atención: $y = \text{sen } x$, $y = \text{cos } x$ e $y = \tan x$ tienen la característica

de «repetirse», y ya las hemos denominado funciones periódicas. Las aplicaciones de las funciones periódicas son sumamente importantes y variadas. Muchos fenómenos naturales tienen carácter periódico; por ejemplo, las ondas de sonido, las vibraciones de una cuerda, las ondas luminosas o de radio, las oscilaciones de un péndulo, etc. Aunque dicho en este momento parezca increíble, las funciones seno y coseno por sí solas son el instrumento más útil para el estudio de estos fenómenos.

Definición: Una función f se dice *periódica de periodo P* si su gráfica se repite cada P unidades horizontales, es decir, si $f(x+P)=f(x)$ para todo x .

Ejemplos:

1. Las funciones $y = \text{sen } x$ e $y = \text{cos } x$ son periódicas de periodo 2π .
2. También son periódicas de periodo 2π las funciones $y = \text{sen}(x + \alpha)$, $y = K\text{sen } x$.

Un caso particular de la primera de ellas es $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, cuya gráfica se consigue trasladando horizontalmente, en este caso $\pi/4$ unidades hacia la derecha, la gráfica de $y = \text{sen } x$.

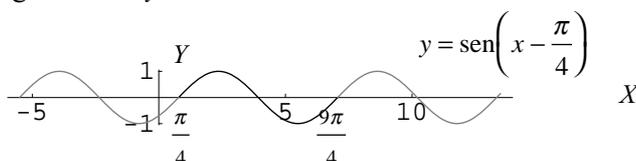


FIGURA 17: Gráfica de la función periódica $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Del mismo modo, $y = 2\text{sen } x$ es un caso particular de $y = K\text{sen } x$, y de nuevo su gráfica se obtiene a partir de la de $y = \text{sen } x$ simplemente duplicando (ampliando por 2) las longitudes verticales.

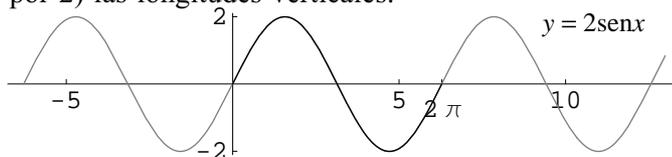


FIGURA 18: Gráfica de la función periódica $y = 2\text{sen } x$.

3. La función $y = \tan x$ es periódica de periodo π .
4. Podemos encontrar otras funciones periódicas, no deducidas de las trigonométricas, como las de estos ejemplos.
Ondas en dientes de sierra: define $f(x) = x$ para $0 \leq x < 1$ y se exige que se repita cada 1 unidad horizontal.

Ondas cuadradas: definimos $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < t < a \\ -1, & \text{si } a < t < 2a \end{cases}$ y se repite cada $2a$ unidades horizontales.

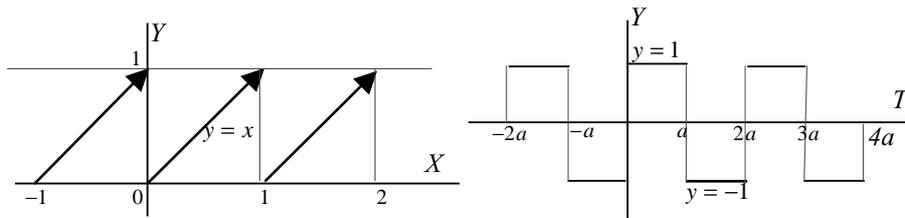


FIGURA 19: Gráfica de la función «ondas en diente de sierra» y de la función «ondas cuadradas».

En seguida se ve que si P es un periodo de f , entonces los múltiplos $2P$, $3P$..., en general kP , $k \in \mathbf{Z}$, son también periodos de f . El menor periodo positivo se llama periodo fundamental o periodo primitivo o el periodo de f .

• *Oscilaciones. Movimiento vibratorio armónico*

Hay un movimiento cuya trayectoria es recta y que está relacionado con el movimiento circular, que nos ha servido para entender desde el punto de vista dinámico las dos funciones trigonométricas fundamentales: $y = \text{sen } x$ e $y = \text{cos } x$. Nos referimos a las oscilaciones o movimiento arriba y abajo de una masa. El movimiento vibratorio armónico simple es el tipo más importante de movimiento oscilatorio.

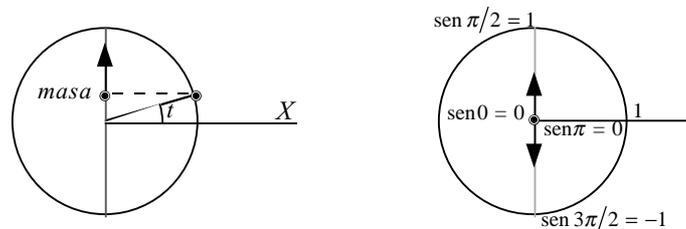


FIGURA 20: Oscilación de una masa, arriba y abajo, desde el origen.

Definición: Una función del tipo $y = f(t) = K \text{sen}(\omega t + \alpha)$ se llama *función sinusoidal*. El movimiento de la proyección de esta función sobre el eje Y es un *movimiento vibratorio armónico*, oscilaciones arriba y abajo del eje Y (suponemos que el eje horizontal mide el tiempo).

En este tipo de funciones aparecen tres valores constantes que tienen un nombre, ahora mismo los recordaremos, y un significado que abordaremos a través de algún ejemplo.

Primero, los nombres: la constante $K > 0$ es la *amplitud*, la constante $\omega > 0$ es la *frecuencia o pulsación*, y la última, la constante α , es la *fase inicial*.

Observemos que una función sinusoidal $y = f(t) = K\text{sen}(\omega t + \alpha)$ es una función periódica, cuyo periodo (primitivo) es $P = \frac{2\pi}{\omega}$, y que su gráfica se deduce de la ya conocida de $y = \text{sen}x$. Veamos unos ejemplos.

Ejemplos:

1. La función $y = \cos x$ es una función sinusoidal, sólo es cuestión de recordar la propiedad $y = \cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Es claro que la amplitud y la frecuencia son 1 (la misma que la función de partida $y = \text{sen}x$) y que la fase inicial es $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (el punto de partida de una onda de la sinusoide se traslada $-\frac{\pi}{2}$).

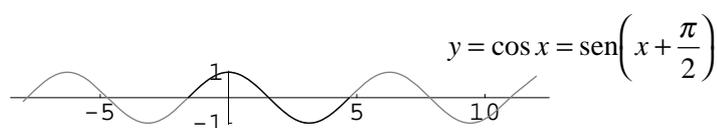


FIGURA 21: La función sinusoidal $y = \cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

2. La función sinusoidal $y = 2\text{sen}\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$ es periódica de periodo $P = \frac{2\pi}{3}$. Escribamos cómo se consigue la gráfica de esta función a partir de $y = \text{sen}t$. Una onda completa de $y = \text{sen}t$, que ocupa el espacio $0 \leq t \leq 2\pi$, ha de pasar a ocupar el espacio $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$. Es decir, la nueva función tiene tres ondas completas, por ser $\omega = 3$, donde $y = \text{sen}t$ tiene sólo una. El número entero $\omega > 0$ indica el número de ondas de la gráfica que hay en cada intervalo de longitud 2π . Además la altura vertical se debe duplicar hacia arriba y hacia abajo (amplificada por $K = 2$). Y por fin, como $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ la sinusoide no pasa por el origen, está desfasada

o desplazada a la derecha en $\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{\pi}{12}$ unidades, esto es, una onda comienza en $\frac{\pi}{12}$.

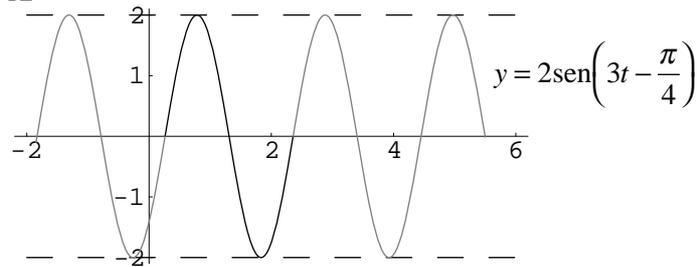


FIGURA 22: La función sinusoidal $y = 2\text{sen}(3t - \pi/4)$.

Ejercicios:

- Resolver las ecuaciones trigonométricas $\text{sen}\theta = -1$ y $\text{sen}\theta = \cos\theta$.

La primera ecuación $\text{sen}\theta = -1$ tiene infinitas soluciones y para construirlas basta buscar el único ángulo $0 \leq \theta < 2\pi$ solución de la ecuación y añadirle el periodo 2π . Así pues, como $\text{sen}\theta = -1$ tiene por solución el ángulo $\frac{3\pi}{2}$, entonces todas las soluciones de la ecuación son $\theta = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, donde $k \in \mathbf{Z}$.

Para resolver la otra ecuación $\text{sen}\theta = \cos\theta$ usamos el mismo método. Como la ecuación es equivalente a $\tan\theta = 1$, entonces las soluciones son $\theta = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- ¿Cuál es el periodo de cada una de las funciones $f(t) = \cos 3t$, $f(t) = \cos 2\pi t$ y $f(t) = 2\pi \cos t$?

 - La función $f(t) = \cos 3t$ tiene periodo $\frac{2\pi}{3}$, ya que

$$f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 3\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos(3t + 2\pi) = \cos 3t = f(t).$$
 - La función $f(t) = \cos 2\pi t$ tiene periodo 1, pues,

$$f(t + 1) = \cos 2\pi(t + 1) = \cos(2\pi t + 2\pi) = \cos 2\pi t = f(t).$$
 - La función $f(t) = 2\pi \cos t$ tiene periodo 2π , ya que

$$f(t + 2\pi) = 2\pi \cos(t + 2\pi) = 2\pi \cos t = f(t).$$

3. Averiguamos ahora si alguna de las siguientes funciones es sinusoidal o, en su defecto, si sólo es periódica: $f(x) = \text{sen}x + \cos x$, $g(x) = \text{sen} \frac{3\pi}{2}x + \text{sen}\pi x$ y $h(x) = \text{sen}x + \text{sen}\pi x$.

— La primera función, $f(x) = \text{sen}x + \cos x$ es *suma de dos funciones sinusoidales de igual periodo*, y, por tanto, es *sinusoidal del mismo periodo*.

Una vez hechas las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sen}x + \cos x = \text{sen}x + \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = \\ &= \sqrt{2}\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

se observa que la amplitud de esta función sinusoidal es $K = \sqrt{2}$, su periodo es 2π y su fase es $\alpha = \pi/4$.

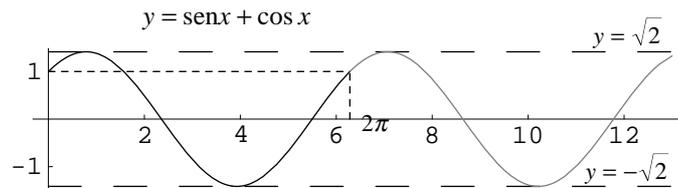


FIGURA 23: La función sinusoidal $f(x) = \text{sen}x + \cos x$.

— La segunda función $g(x) = \text{sen} \frac{3\pi}{2}x + \text{sen}\pi x$ es *suma de dos funciones sinusoidales de periodos distintos*, el primer sumando de periodo $\frac{4}{3}$ y el segundo de periodo 2, luego *no es sinusoidal*. Sin embargo, g es periódica, de periodo un múltiplo común a los periodos de cada sumando, que en este caso es 4 (Si el cociente de los periodos de cada función sumando es un número racional, entonces la suma es una función periódica).

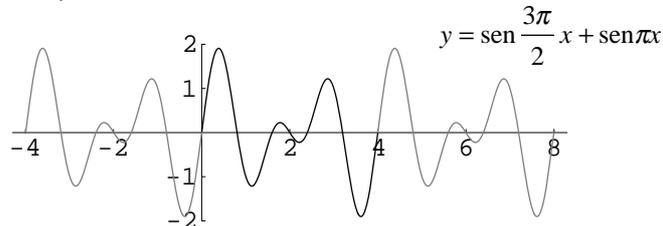


FIGURA 24: La función periódica, no sinusoidal, $g(x) = \text{sen} \frac{3\pi}{2}x + \text{sen}\pi x$.

- Por fin, la última función $h(x) = \text{sen}x + \text{sen}\pi x$ no es sinusoidal por la misma razón que el último ejemplo, y tampoco es periódica, pues los periodos de cada sumando son 2π y 2 , que no tienen ningún múltiplo común. Ahora bien, las funciones así obtenidas tienen un carácter aproximadamente periódico y propiedades que las asemejan a las funciones periódicas; son casos especiales de las llamadas funciones casiperiódicas, de gran importancia en la Matemática moderna.

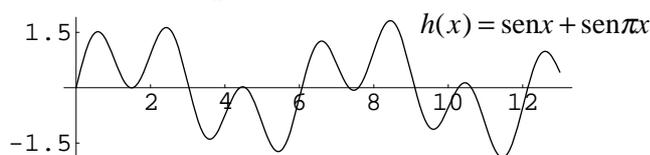


FIGURA 25: Función no periódica, no sinusoidal, $h(x) = \text{sen}x + \text{sen}\pi x$.

Inversas de las funciones trigonométricas

Las tres funciones trigonométricas $y = \text{sen}x$, $y = \text{cos}x$, $y = \text{tan}x$ son básicas. Es, pues, natural invertirlas. Ése es nuestro objetivo ahora, conocer las funciones inversas de las funciones trigonométricas básicas.

Hay un problema. Se trata de que a cada salida de una función periódica, en particular una trigonométrica, le corresponden infinitas entradas. Se resuelve quedándonos sólo con un determinado trozo de cada una de las funciones $y = \text{sen}x$, $y = \text{cos}x$, $y = \text{tan}x$. Empecemos.

• Función inversa del seno trigonométrico

Consideramos la función $y = \text{sen}x$. Restringimos su dominio a los ángulos x que están entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. La función es creciente en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y, por tanto, a cada salida o valor de y le corresponde un sólo ángulo x .

La función inversa de $y = \text{sen}x$ es $x = \text{sen}^{-1}y$. Es decir,

$$x = \text{sen}^{-1}y \Leftrightarrow \begin{cases} y = \text{sen}x \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Históricamente, el ángulo x , $x = \text{sen}^{-1}y$, se ha llamado *arco seno de y*; de hecho, el símbolo $x = \text{arcsen}y$ se utiliza en muchos textos matemáticos y en la mayoría de los cálculos simbólicos con ordenador. Nosotros adoptamos esta notación mayoritaria.

Antes de los ejemplos es importante escribir el dominio de $x = \arcsen y$. Las entradas o dominio de la función arco seno son los números entre -1 y 1 , que es, como debía ser, el recorrido de la función seno.

Ejemplos:

1. Vamos a calcular los siguientes ángulos: $\arcsen 1$, $\arcsen(-1)$, $\arcsen(0'3)$ y $\arcsen(-0'3)$.

El ángulo $x = \arcsen 1$ es el único que verifica $\begin{cases} 1 = \operatorname{sen} x \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$; se trata, pues,

de $x = \frac{\pi}{2}$.

De nuevo, $x = \arcsen(-1) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \operatorname{sen} x \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$.

Para obtener $\arcsen(0'3)$ necesitamos alguna máquina de calcular que nos dé un valor aproximado. La respuesta en este caso es: $\arcsen(0'3) \approx 0'3047$ radianes.

El cálculo de $\arcsen(-0'3)$ es $\arcsen(-0'3) = -\arcsen(0'3) \approx -0'3047$.

2. Sabemos que $\operatorname{sen} \pi = 0$. ¿Es cierto que $\arcsen 0 = \pi$?
No, no es cierto que $\arcsen 0 = \pi$, pues las salidas de la función «arco seno» son ángulos del intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Lo correcto es $\arcsen 0 = 0$.
3. ¿Cuánto vale $\operatorname{sen}(\arcsen 0'541)$? Calculamos también $\operatorname{sen}(\arcsen y)$, para $-1 \leq y \leq 1$, y $\arcsen(\operatorname{sen} x)$, para $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Como las funciones «seno» y «arco seno» son inversas, es claro que el resultado es $\operatorname{sen}(\arcsen 0'541) = 0'541$.

Por la misma razón $\operatorname{sen}(\arcsen y) = y$, siempre que $-1 \leq y \leq 1$, y $\arcsen(\operatorname{sen} x) = x$, para $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

• Función inversa del coseno trigonométrico

Para la función $y = \cos x$ restringimos el dominio a los ángulos x que están entre 0 y π . La función es decreciente en el intervalo $[0, \pi]$ y, por consiguiente, a cada salida o valor de y le corresponde un sólo ángulo x .

La función inversa de $y = \cos x$ es $x = \cos^{-1} y$. Es decir, $x = \cos^{-1} y \Leftrightarrow \begin{cases} y = \cos x \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$. Al igual que antes, el ángulo x , $x = \cos^{-1} y$, se ha llamado tradicionalmente *arco coseno de*; así pues, de ahora en adelante escribimos $x = \arccos y \Leftrightarrow \begin{cases} y = \cos x \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$.

De nuevo es importante reconocer el dominio de $x = \arccos y$. Las entradas o dominio de la función arco coseno son los números entre -1 y 1 , que es, como debía ser, el recorrido de la función coseno.

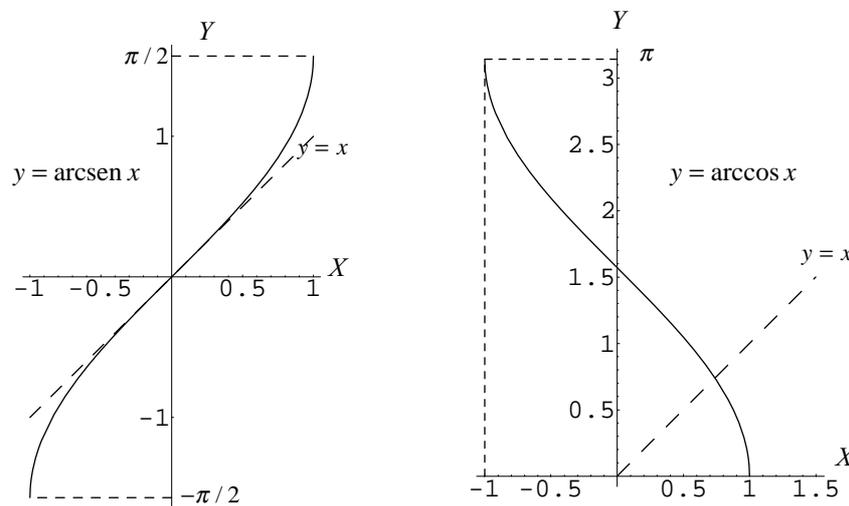


FIGURA 26: La función *arco seno*, a la izquierda; y la función *arco coseno*, a la derecha.

Ejemplos:

1. Calculamos $\arccos 1$, $\arccos(-1)$, $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ y $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

El ángulo $x = \arccos 1$ verifica $\begin{cases} 1 = \cos x \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$, luego la solución es $x = 0$.

De nuevo, $x = \arccos(-1) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \cos x \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi$.

Análogamente, $x = \arccos(0.5) \Leftrightarrow \begin{cases} 0.5 = \cos x \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

De igual modo, $x = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos x \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6}$.

2. ¿Cuánto vale $\cos(\arccos 0'8)$? ¿Y $\arccos(\cos 4)$? Calculamos también $\cos(\arccos y)$, para $-1 \leq y \leq 1$, y $\arccos(\cos x)$, para $0 \leq x \leq \pi$.

Las funciones «coseno» y «arco coseno» son inversas entre sí, luego $\cos(\arccos 0'8) = 0'8$. Sin embargo, $\arccos(\cos 4) \neq 4$ ya que $4 \notin [0, \pi]$; el resultado correcto es $\arccos(\cos 4) = 4 - \pi \approx 0'8584$.

• *Función inversa de la tangente trigonométrica*

Para invertir la función $y = \tan x$ se exige que los ángulos x estén entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. La función es creciente en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y, por consiguiente, a cada salida o valor de y le corresponde un sólo ángulo x .

La función inversa de $y = \tan x$ es $x = \tan^{-1} y$ o bien $x = \arctan y$, que se lee *arco tangente de y*. Se tiene: $x = \tan^{-1} y = \arctan y \Leftrightarrow \begin{cases} y = \tan x \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Ahora las entradas o dominio de la función arco tangente son todos los números reales, es decir, el recorrido de la función tangente.

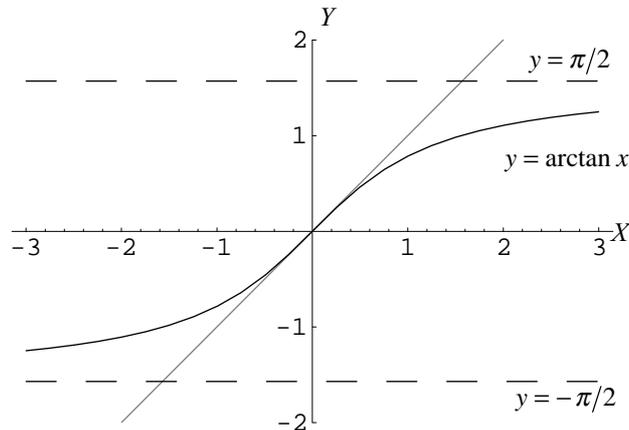


FIGURA 27: La función *arco tangente*, inversa de la función *tangente*.

Ejemplos:

1. Calculemos los siguientes ángulos: $\arctan 1$, $\arctan(-1)$ y $\arctan \sqrt{3}$.

Como ya es habitual, $x = \arctan 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \tan x \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

El cálculo de $\arctan(-1)$ es: $\arctan(-1) = -\arctan 1 = -\pi/4$.

Finalmente, $x = \arctan \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} = \tan x \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

2. Calculamos $\tan(\arctan y)$, $\forall y \in \mathbf{R}$, y $\arctan(\tan x)$, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Únicamente hay que usar que las funciones «tangente» y «arco tangente» son inversas una de otra, y así:

— $\tan(\arctan y) = y$, para todo $y \in \mathbf{R}$,

— $\arctan(\tan x) = x$, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Ejercicios:

1. Calculemos $\sin(\arccos 0'6)$ y, en general, $\sin(\arccos y)$, $-1 \leq y \leq 1$.

De $x = \arccos 0'6 \Leftrightarrow \begin{cases} 0'6 = \cos x \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$, se deduce que

$$\sin(\arccos 0'6) = \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - 0'6^2} = 0'8.$$

El mismo razonamiento conduce al cálculo de $\sin(\arccos y)$; así pues, de

nuevo tenemos $x = \arccos y \Leftrightarrow \begin{cases} y = \cos x \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$, y esto implica que

$$\sin(\arccos y) = \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - y^2}.$$

2. Calculemos ahora $\cos(\operatorname{arcsen} y)$, siendo $-1 \leq y \leq 1$.

El razonamiento es análogo al realizado en el ejercicio anterior.

Al ser $x = \operatorname{arcsen} y \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sin x \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, se obtiene

$$\cos(\operatorname{arcsen} y) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}.$$

3. Calculemos $\cos\left(2\arcsen\frac{-2}{3}\right)$ y, en general, $\cos(2\arcseny)$, $-1 \leq y \leq 1$.

Otra vez escribimos que $x = \arcsen\frac{-2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2}{3} = \text{sen}x \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, y hemos de

calcular $\cos\left(2\arcsen\frac{-2}{3}\right) = \cos(2x)$, cuyo valor obtenemos usando la fórmula de transformación del coseno del ángulo doble como sigue:

$$\cos\left(2\arcsen\frac{-2}{3}\right) = \cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1 - 2\text{sen}^2 x = \frac{1}{9}.$$

En general, como $x = \arcseny \Leftrightarrow \begin{cases} y = \text{sen}x \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, se deduce que

$$\cos(2\arcseny) = \cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1 - 2\text{sen}^2 x = 1 - 2y^2.$$

4. ¿Es cierto que $\text{sen}(2\arcseny) = 2y$, para $-1 \leq y \leq 1$?

NO. En las siguientes líneas obtenemos la fórmula correcta.

De $x = \arcseny \Leftrightarrow \begin{cases} y = \text{sen}x \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, se deduce que

$$\text{sen}(2\arcseny) = \text{sen}(2x) = 2\text{sen}x \cos x = 2\text{sen}x \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = 2y\sqrt{1 - y^2}.$$

En consecuencia, $\text{sen}(2\arcseny) = 2y$ si, y solamente si, $y = 0$.

Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas son unas nuevas funciones que se construyen como combinación de funciones exponenciales. La consideración de las funciones hiperbólicas es interesante porque simplifica muchas fórmulas de Cálculo integral y Geometría analítica, además de ser de aplicación directa en Mecánica y Electricidad.

Definición: Se llama *coseno hiperbólico* y *seno hiperbólico* a las funciones definidas por $y = \text{Ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $y = \text{Sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, siendo x un número real.

Ejemplos: Calculamos algunos valores de salida de estas funciones:

$$\text{Sh}0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 0, \quad \text{Sh}1 = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} \approx 1,18,$$

$$\begin{aligned} \text{Sh}(\ln 4) &= \frac{e^{\ln 4} - e^{-\ln 4}}{2} = \frac{15}{8} = 1'875, & \text{Sh}(\ln x) &= \frac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{2} = \frac{x^2 - 1}{2x}, \\ \text{Ch}0 &= \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1, & \text{Ch}1 &= \frac{e^1 - e^{-1}}{2} \approx 1'54, \\ \text{Ch}(\ln 4) &= \frac{e^{\ln 4} + e^{-\ln 4}}{2} = \frac{17}{8} = 2'125, & \text{Ch}(\ln x) &= \frac{e^{\ln x} + e^{-\ln x}}{2} = \frac{x^2 + 1}{2x}. \end{aligned}$$

Es muy sencillo comprobar que las dos funciones hiperbólicas definidas verifican la relación fundamental: $\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x = 1$. Obsérvese la analogía con la relación fundamental de la trigonometría $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$.

Se pueden deducir fórmulas o propiedades de las funciones hiperbólicas análogas a las propiedades de las funciones trigonométricas.

:

A continuación damos una idea de la variación de estas funciones, cuyas gráficas están en la figura 26.

• *Función coseno hiperbólico*

La función $y = \text{Ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$ tiene las propiedades inmediatas que indicamos:

- El dominio es el conjunto de los números reales.
- Es una función par (gráfica simétrica respecto al eje de ordenadas):

$$y(-x) = \text{Ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \text{Ch}x = y(x)$$

- La gráfica corta al eje OY en el punto (0,1).
- Esta función produce salidas o imágenes positivas, es decir,

$$y = \text{Ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0.$$

- El recorrido es el conjunto de números del intervalo $[1, +\infty)$.
- Resolviendo la ecuación $y = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$, para la incógnita x , se obtiene

$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$, o bien, $x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right)$. Esto significa que sólo los valores $y \geq 1$ proceden de alguna entrada x , exactamente la salida $y \geq 1$ procede de las dos entradas $x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right)$.

• *Función seno hiperbólico*

La función $y = \text{Sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$ tiene las siguientes propiedades inmediatas:

- El dominio es el conjunto de los números reales.
- Es una función impar (gráfica simétrica respecto al origen de coordenadas):

$$y(-x) = \text{Sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\text{Sh}x = -y(x)$$

- La gráfica corta a los ejes en el punto $(0,0)$.
- El signo de la salida o imagen y depende del signo de la entrada x . Así,

$$y = \text{Sh}x = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \begin{cases} > 0, & \text{si } x > 0 \\ < 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- El recorrido es el conjunto de los números reales, \mathbf{R} .
- De nuevo, resolviendo la ecuación $y = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$, para la incógnita x , se obtiene $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, o bien $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$. Esto significa que cada número real y es la salida de la única entrada $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$.

Al comparar las dos funciones hiperbólicas $y = \text{Sh}x = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$, $y = \text{Ch}x = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$, se observa que $\text{Sh}x < \text{Ch}x$, pues $\text{Sh}x - \text{Ch}x = -\frac{1}{e^x} < 0$.

La gráfica de la función $y = \text{Ch}x$ es una línea conocida como *catenaria*. Es la forma que adopta un cable suspendido bajo la acción de la gravedad.

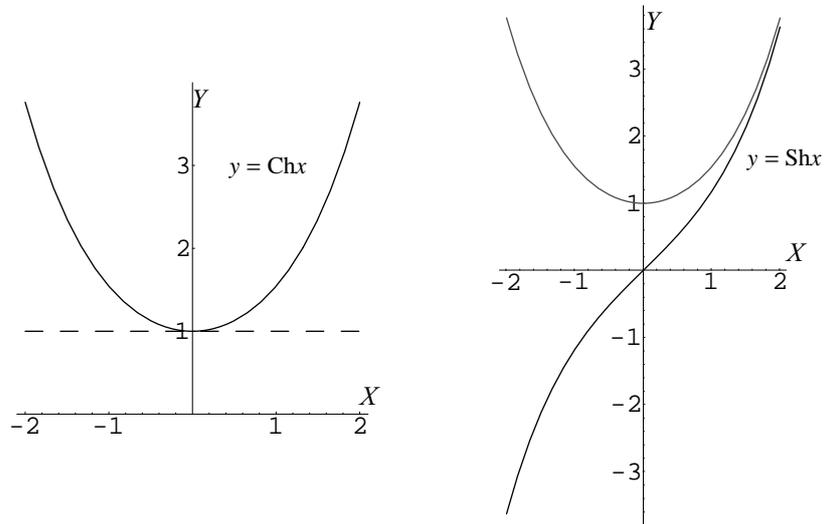


FIGURA 28: Las dos funciones hiperbólicas básicas.

5.2. Límites y funciones continuas

Entre todos los conceptos que se presentan en el Cálculo infinitesimal el de límite es, sin duda, el más importante y quizás el más difícil de comprender. Su importancia quedará patente al ver que todo lo que emprendamos a partir de ahora va a depender de él (derivada, integral, etc.), lo cual nos exige conseguir la comprensión adecuada del concepto en cuestión.

Dividimos los contenidos en los siguientes apartados:

1. *Concepto de límite: intuición y rigor matemático.*
2. *Funciones continuas.*
3. *Reglas del cálculo de límites.*
4. *Cálculo de límites.*
5. *Dos propiedades de las funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado.*

Concepto de límite: intuición y rigor matemático

Nuestra primera toma de contacto con el concepto de límite L de una función f en un punto c va a usar la siguiente idea intuitiva: puntos próximos a c se transforman en puntos próximos a L . La definición rigurosa llegará inmediatamente después.

Aquí tenemos cinco ejemplos diferentes para ilustrar la idea de límite. Desde luego no son oficiales las afirmaciones que vamos a hacer sobre los límites de los ejemplos; estamos trabajando a nivel intuitivo. Claro que la intuición se apoya en nuestra observación. Por ejemplo, podemos observar las gráficas de la función, o podemos observar el cómputo de las imágenes de la función, o podemos observar que la función admite expresiones equivalentes, o ... Realmente, la gráfica de la función ayuda mucho y, así, en los cinco ejemplos la tendremos en cuenta:

1. Cuando $x \rightarrow 3$, es casi obvio que la función $f(x) = 4x - 5 \rightarrow 7$. La notación es $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$.

2. Cuando $x \rightarrow 1$, la función $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \rightarrow 3$. De nuevo, escribimos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$$

Ahora el valor 1 no es una entrada de la función $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$. ¿Cómo

podemos justificar que el límite de la función es 3? Hagamos dos cosas: mirar la gráfica de la función y expresar la función en otra forma

equivalente, $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$ para $x \neq 1$. Por cualquiera de los dos métodos nos convencemos.

3. Cuando $x \rightarrow 0$, la función salto unitario $U(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ no se acerca a

ningún número real, salta de 0 a 1.

$U(x)$ no tiene límite cuando $x \rightarrow 0$, como se aprecia en la gráfica de la función.

Ahora bien, esta función tiene límites laterales, por la izquierda y por la derecha. El límite por la izquierda de 0, $x \rightarrow 0^-$, es el valor al que se acerca $U(x)$ cuando x se aproxima a 0 desde la izquierda (con valores menores que 0). Así, tenemos $\lim_{x \rightarrow 0^-} U(x) = 0$. Sin embargo, el límite por la derecha,

ahora la x se acerca a 0 desde su derecha (con valores mayores que 0), es

1, esto es, $\lim_{x \rightarrow 0^+} U(x) = 1$.

4. Cuando $x \rightarrow 0$, la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ supera cualquier numero real preestablecido. Es, pues, razonable poner $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, pero el límite no existe.

5. Cuando $x \rightarrow 0$, la función $f(x) = \text{sen} \frac{1}{x}$ tiene infinitas oscilaciones. Cuanto menor es x , mayor es $1/x$ y el seno oscila más y más rápidamente. Así pues, el $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen} \frac{1}{x}$ no existe.

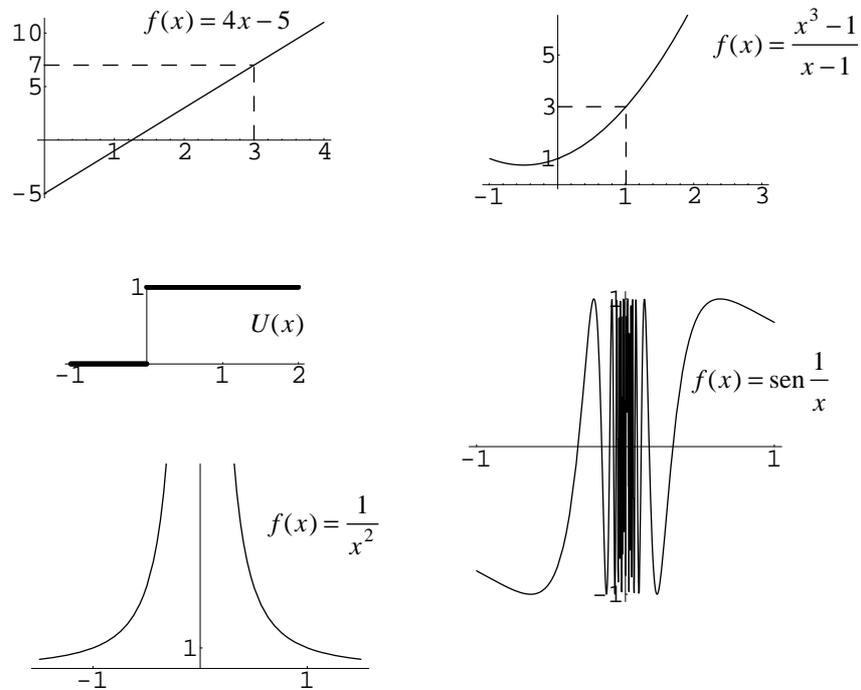


FIGURA 29: Gráficas de los cinco ejemplos de límites.

Enseguida vamos a llegar la definición $\varepsilon - \delta$ de límite, pero antes escribimos los sucesivos refinamientos de la idea intuitiva de límite que permitirán entender mejor la definición:

- Si x se aproxima a c , la función $f(x)$ se aproxima a L .
- Si $x - c$ se hace pequeño, entonces $f(x) - L$ debería ser pequeño.

- Si $x - c$ se hace *suficientemente* pequeño, entonces $f(x) - L$ será *tan pequeño como queramos*.
- Si $|x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Aquí ε indica una distancia arbitrariamente pequeña, mientras que δ es la distancia suficientemente pequeña que se necesite.

Definición: La afirmación $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ significa que para cualquier $\varepsilon > 0$, por muy pequeño que sea, se puede encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - c| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ejemplos: Vamos a probar que las dos primeras funciones de los anteriores ejemplos verifican lo afirmado: $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$ y $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$.

1. $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$.

Necesitamos que $|(4x - 5) - 7| < \varepsilon$, para lo cual hemos de exigir $|x - 3| < \delta$. ¿Qué valor de δ nos conviene poner? Como $|4x - 12|$ es exactamente 4 veces $|x - 3|$, decidimos que nos conviene elegir δ inferior a $\frac{\varepsilon}{4}$.

Comprobémoslo: siempre que $0 < |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$, se verifica que, al multiplicar por 4, $|4x - 12| < \varepsilon$.

Observemos que al tomar límites «ignoramos» el punto de llegada c , y puede ser que el valor $f(c)$ no tenga nada que ver con el límite L . Ahora bien, en este ejemplo se cumple $L = f(c)$, pues $7 = f(3)$. Es un tipo especial de función: una *función continua* en $c = 3$. El ejemplo que sigue es el de una función no continua en c , ya que $f(c)$ no existe.

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$.

De nuevo necesitamos que $\left| \frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3 \right| < \varepsilon$, exigiendo que $0 < |x - 1| < \delta$.

Como vamos a exigir que $x \neq 1$, podemos escribir y escribimos:

$$\left| \frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3 \right| = |x^2 + x - 2| = |x - 1| \cdot |x + 2|.$$

Hemos decidido elegir δ menor que el valor mínimo de estos dos, 1 y $\frac{\varepsilon}{4}$.

Veamos que la elección es válida: si $0 < |x-1| < \delta$, entonces $|x-1| < 1$ y $|x-1| < \frac{\varepsilon}{4}$. De $|x-1| < 1$ (lo cual quiere decir que $x \in (0,2)$), se deduce que $|x+2| < 4$, que junto con $|x-1| < \frac{\varepsilon}{4}$ nos permiten concluir que $|x-1| \cdot |x+2| < \varepsilon$.

Con estos dos ejemplos podemos hacernos una idea del uso de la definición de límite y, desde luego, de su escasa utilidad para obtener el límite de una función. Afortunadamente, se puede establecer que el límite de muchas funciones se obtiene sustituyendo el punto en la función, es decir, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$. Son exactamente las funciones continuas.

Antes de la sección de funciones continuas, sólo una mirada más a uno de los ejemplos expuestos al comienzo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Ya lo hemos dicho, pero merece la pena repetirlo: dicho límite no existe. Su gráfica nos revela cómo la recta vertical $x=0$ (el eje Y) «acompaña» a la función en su viaje hacia $+\infty$. La geometría le pone un nombre a esta clase de rectas verticales y dice: $x=0$ es una *asíntota vertical* de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$. También $x=0$ es una *asíntota vertical* de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, pues los límites laterales son $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; de hecho, bastaría con que uno de los dos límites laterales fuera ∞ .

Ejercicios: Para terminar esta sección calculamos algunos límites más sin usar la definición $\varepsilon - \delta$: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2}$.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Por un lado, la gráfica de la función (véase la figura 30) parece confirmarlo y, por otro lado, cuando x se acerca a 0 y es multiplicado por números $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ acotados, que oscilan entre -1 y 1 , el producto también se acerca a 0.

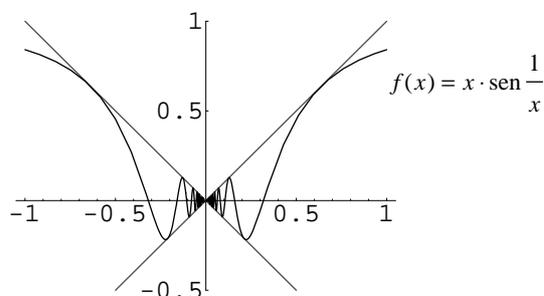


FIGURA 30: Gráfica de la función del ejercicio 1.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ no existe. Se trata de nuevo de una función que salta de -1 a 1 justo en $x=0$. Podemos precisar que el valor de los límites laterales es: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$, y destacar que son distintos.
3. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$. Efectivamente, la gráfica nos muestra cómo la recta vertical $x=2$ acompaña por su izquierda a la función hacia $-\infty$.

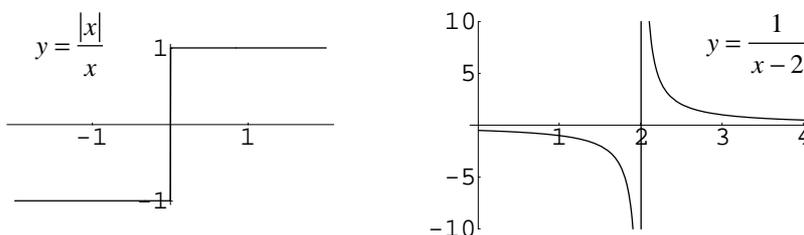


FIGURA 31: Gráficas de las funciones de los dos últimos ejercicios.

Funciones continuas

La ciencia matemática no se hubiese desarrollado sin la importante teoría de la continuidad. La idea de continuidad, en matemáticas, es análoga a la idea intuitiva de continuidad asociada al tiempo, al espacio o al movimiento con la que todas las personas interpretamos la experiencia de cada día. Pero, en matemáticas, una vaga noción debe ser precisada para conseguir que sea más útil.

La definición de función $f(x)$ continua en un punto $x=c$ se basa en el concepto de límite, pero además aparece en el escenario el número $f(c)$. En la sección anterior nos hemos dedicado a hablar de límites y quedó claro que x se

aproxima a c pero nunca lo alcanza; luego $f(c)$ no tenía ningún papel. No obstante, vimos que el ejemplo $f(x) = 4x - 5$ verifica $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7 = f(3)$ y ya avanzamos un nombre para este tipo de funciones: funciones continuas.

Escribimos esta idea en la definición.

Definición: Una función $f(x)$ se dice continua en un punto $x = c$ si verifica:

1. El número $f(c)$ existe, es decir, c está en el dominio de f .
 2. El límite de $f(x)$ existe, es decir, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.
 3. El límite L y la imagen $f(c)$ son números iguales: $L = f(c)$.
- O bien, resumimos estas tres condiciones en una sola igualdad: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Tenemos a nuestra disposición todos los ejemplos de la sección anterior y los usamos ahora para distinguir cuáles de ellos son funciones continuas y cuáles no lo son.

1. Tenemos que $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$, es decir, la función $f(x) = 4x - 5$ verifica $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$. La función $f(x) = 4x - 5$ es continua en $x = 3$

2. La función $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ no está definida en $x = 1$, luego no es continua en este punto. No obstante, existe límite, que es $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$. Esto significa que hay un valor «correcto» de $f(1)$ y es precisamente 3. Este tipo de discontinuidad es *evitable*.

3. La función salto unitario $U(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ no tiene límite para $x \rightarrow 0$.

La discontinuidad de esta función es de tipo, digamos más grave que la anterior, pues no hay valor correcto para $f(0)$. Se llama discontinuidad *esencial*.

Se aprecia en la gráfica de la función y en los límites laterales $\lim_{x \rightarrow 0^-} U(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} U(x)$ que esta función tiene una *discontinuidad de salto* en $x = 0$ y además el salto es de 1 unidad.

4. También es discontinua la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $x = 0$, pues de nuevo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ no existe. Es claro que esta discontinuidad es esencial.

5. La función $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ verifica que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ no existe (recordar las oscilaciones de esta función cuando $x \rightarrow 0$). Esta discontinuidad es también esencial.

• *Clasificación de las discontinuidades*

En los ejemplos anteriores ya hemos puesto nombre a las discontinuidades que hemos observado. Ahora escribimos la idea para una función general $f(x)$.

Supongamos que $f(x)$ es discontinua en $x = c$. Esta discontinuidad es de alguno de estos dos tipos:

- *Evitable*: El límite de $f(x)$ existe, es decir, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$. Esto significa que hay un valor correcto de $f(c)$ y es $f(c) = L$.
- *Esencial*: El límite de $f(x)$ no existe. No hay, pues, un valor correcto de $f(c)$.

Entre los diferentes tipos de discontinuidades esenciales sólo vamos a distinguir la llamada *discontinuidad de salto*. Se trata de una discontinuidad en la cual los límites laterales existen, pero son distintos:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \neq M = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x).$$

En $x = c$ la gráfica de $f(x)$ tiene un salto de longitud $|L - M|$.

• *Lista de funciones continuas*

No vamos a dedicarnos a confirmar con todo el rigor que cada una de las funciones elementales es continua. La situación es más fácil. Por un lado, casi siempre podemos reconocer las funciones continuas mediante su gráfica: *Una función es continua si podemos dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel*. Por otro lado, como las funciones básicas, que a continuación listamos, son continuas, también lo son las funciones resultado de combinarlas.

- Las funciones polinómicas $P(x)$ son continuas.
- Las funciones trigonométricas $\sin x$ y $\cos x$ son continuas. Sus inversas también son continuas.
- Las funciones exponenciales a^x son continuas.
- Las funciones logarítmicas $\log_a x$ son funciones continuas.
- Las funciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)}$ son continuas excepto en los puntos que anulan al denominador.

— La función trigonométrica $\tan x$ es continua excepto en los puntos que anulan su denominador ($\cos x = 0$). Su función inversa $\arctan x$ es continua.

Terminamos esta sección volviendo a la definición de función continua. A veces las palabras y las notaciones nos impiden observar importantes características. Este problema se combate fácilmente usando expresiones distintas pero equivalentes de los conceptos. Eso vamos a hacer con la continuidad.

Decir que f es continua en x significa que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$, es decir, $f(x + \Delta x) - f(x) \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Leemos, pues, que *el cambio en la función Δf tiende a 0 cuando el cambio en la variable Δx tiende a 0*. Una observación: no se hace mención a la velocidad, mejor dicho, a la relación entre las velocidades de acercamiento a 0 de cada uno de los incrementos, pero ésta es una información importante que vendrá dada por la derivada.

Reglas del cálculo de límites

La siguiente tarea consiste en recordar el álgebra de límites finitos e infinitos, que facilitarán el cálculo de muchos límites. Incluimos en forma de cuadro la regla de la suma, la del producto y la del cociente del límite de dos funciones.

En todos los cuadros la primera fila contiene las diferentes posibilidades de $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ y la primera columna las posibilidades de $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ que conviene distinguir para deducir cuál es el resultado de $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x))$, de

$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x))$ y de $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Suma	$-\infty$	L	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$??
M	$-\infty$	$L+M$	$+\infty$
$+\infty$??	$+\infty$	$+\infty$

Producto	$-\infty$	$L < 0$	0	$L > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$??	$-\infty$	$-\infty$
$M < 0$	$+\infty$	LM	0	LM	$-\infty$
0	??	0	0	0	??
$M > 0$	$-\infty$	LM	0	LM	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$??	$+\infty$	$+\infty$

Cociente	$-\infty$	$L < 0$	0	$L > 0$	$+\infty$
$-\infty$??	0	0	0	??
$M < 0$	$+\infty$	L/M	0	L/M	$-\infty$
0^-	$+\infty$	$+\infty$??	$-\infty$	$-\infty$
0^+	$-\infty$	$-\infty$??	$+\infty$	$+\infty$
$M > 0$	$-\infty$	L/M	0	L/M	$+\infty$
$+\infty$??	0	0	0	??

En los tres cuadros hay algunas casillas que contienen un doble interrogante ?? . Esta expresión significa que no hay un resultado general que se pueda apuntar y que, por consiguiente, cada ejemplo particular ha de tratarse individualmente. En la literatura matemática estas situaciones se llaman límites indeterminados, y se resumen con las siguientes notaciones $\infty - \infty$ (la indeterminación de la suma), $0 \cdot \infty$ (la indeterminación del producto) y $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ (las indeterminaciones del cociente).

En el siguiente apartado vamos a calcular límites usando las reglas del cálculo de límites que tenemos resumidas en estos tres cuadros y abordaremos el problema de las indeterminaciones con los medios de que disponemos en este momento. Los recordaremos con los ejemplos.

Cálculo de límites

• Las funciones racionales

No vamos a tardar en comprobar que el límite de una función racional se puede resolver de forma totalmente satisfactoria. Lo vemos en los siguientes ejemplos: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x}{x^3 + 1}$, $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t + 3}{t^2 - 4}$, $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 25}{x - 5}$ y $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$.

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x}{x^3 + 1}$. Como el numerador y el denominador son funciones continuas, el límite de ambos se calcula sustituyendo x por 1. Tras consultar la tabla del límite de un cociente de dos funciones, concluimos que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x}{x^3 + 1} = \frac{1^2 - 6 \cdot 1}{1^3 + 1} = \frac{-5}{2} = -2'5$.
- $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t + 3}{t^2 - 4} = \frac{5}{0^+} = +\infty$. El razonamiento es análogo al anterior.

3. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 25}{x - 5}$. De nuevo el límite del numerador y el del denominador se calculan sustituyendo $x = 5$. La tabla del límite de un cociente de dos funciones nos muestra que es necesario distinguir si $x \rightarrow 5^-$ o si $x \rightarrow 5^+$ y así: $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 + 25}{x - 5} = \frac{50}{0^-} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 + 25}{x - 5} = \frac{50}{0^+} = +\infty$.
4. Finalmente, $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$. En este caso, el límite del numerador es 0 y también lo es el del denominador; aparece pues la indeterminación del cociente $\frac{0}{0}$. Ahora bien, el cálculo del límite es sencillo si se simplifica la fracción por el factor $x - 5$, común al numerador y al denominador. Así, $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 10$.

• *Más límites básicos*

Empezamos calculando algunos límites en los que aparecen funciones irracionales.

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{6+x}}$. El límite se obtiene aplicando la regla del límite del cociente y sabiendo que la función del numerador y la del denominador son continuas. Así, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{6+x}} = \frac{\sqrt{4-2}}{\sqrt{6+2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. Por sustitución de $x = 0$, nos encontramos con la indeterminación $\frac{0}{0}$. Ahora vamos a usar un truco muy útil: multiplicar numerador y denominador de la función por el factor $(\sqrt{1+x}+1)$, conocido como conjugado del numerador. Veamos que funciona bien:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}$. De nuevo se trata de un límite al que la aplicación del límite del cociente conduce a la indeterminación $\frac{0}{0}$. La técnica desarrollada en el ejercicio anterior es útil para este caso; ahora el factor por el que vamos a multiplicar numerador y denominador es $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-(1-x^2)}}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}. \end{aligned}$$

El cálculo del último límite sólo es posible si distinguimos entre $x \rightarrow 0^-$ y $x \rightarrow 0^+$. De hecho, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Así pues, la función $f(x) = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{x}$ tiene límites laterales distintos en $x=0$, es decir, se trata de una discontinuidad de salto en $x=0$.

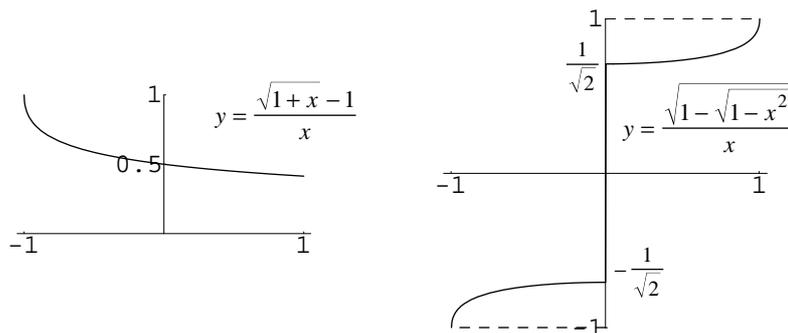


FIGURA 32: Gráficas de las dos últimas funciones irracionales.

Los próximos límites son muy interesantes. En ellos cobra especial importancia la idea de comparar la velocidad con que diferentes funciones se

aproximan a 0.

Primer límite interesante: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$. Expresa que la velocidad o pendiente de la función $f(x) = \text{sen}x$ en $x = 0$ es proporcional, con factor de proporcionalidad 1, a la de la función $y = x$. Conviene detenerse a observar la gráfica conjunta de ambas funciones que está en la figura 33.

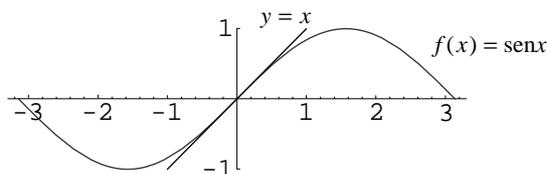


FIGURA 33: Gráficas de las funciones equivalentes $y = x$ y $y = \text{sen}x$ cuando $x \rightarrow 0$.

Otros límites interesantes son: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. La lectura del primero $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ es que la velocidad o pendiente de la función $f(x) = 1 - \cos x$ en $x = 0$ es mucho menor que la de la función $y = x$. Sin embargo, a la vista del segundo límite decimos que las velocidades de $1 - \cos x$ y x^2 son comparables. La relación es de 1 a 2. Comprobémoslo:

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \rightarrow \frac{1}{1+1}, \text{ cuando } x \rightarrow 0.$$

Aún hay más límites interesantes, los dejamos para después de estos ejercicios de aplicación de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$. Calculamos los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \tan x}{\text{sen}x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{\text{sen} \frac{x}{2}}.$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \tan x}{\text{sen}x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{x}{\text{sen}x} \tan x = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{\text{sen} \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \text{sen}x}{x \text{sen} \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\frac{x}{2}}{\text{sen} \frac{x}{2}} \cdot \frac{\text{sen}x}{x} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

Los últimos límites interesantes, por el momento, son

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Sólo podemos aducir las gráficas como justificación.

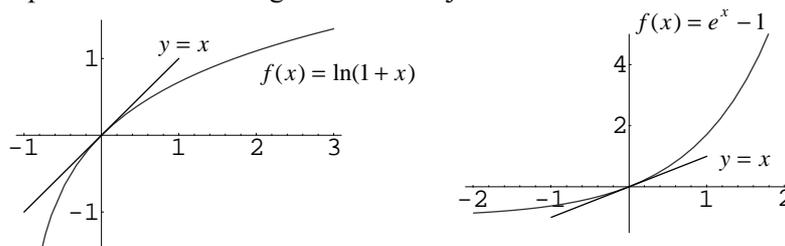


FIGURA 34: Gráficas de otras funciones equivalentes $\ln(1+x) \approx x$ y $e^x - 1 \approx x$, cuando $x \rightarrow 0$.

• *Límites en el infinito.*

La definición de $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow +\infty$ es ésta: «Para cada $\varepsilon > 0$ existe un número real K tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, siempre que $x > K$ ». Dejamos al lector que escriba la definición de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Explicamos como ejemplo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen}x}{x} = 0$ y que no existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen}x}{x} = 0$. La gráfica de esta función nos muestra cómo es el comportamiento de la función cuando $x \rightarrow +\infty$: se va hacia la recta horizontal $y=0$, que llamamos asíntota horizontal. También podemos razonar que el producto de números $\frac{1}{x}$, que tienden a 0, por valores que se mantienen acotados, como $\text{sen}x$, también tiende a 0.

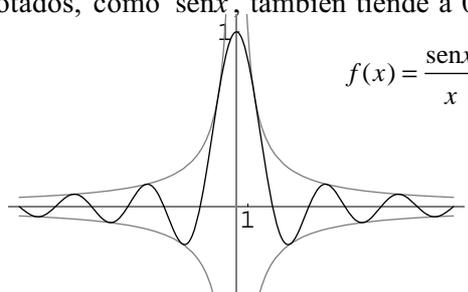


FIGURA 35: Comportamiento de la función $f(x) = \frac{\text{sen}x}{x}$, cuando $x \rightarrow +\infty$.

2. No existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$. Cuando $x \rightarrow +\infty$, la función coseno va oscilando indefinidamente; por tanto, no se aproxima a ningún valor L .

Regla importante: Cuando $x \rightarrow +\infty$, el cociente de polinomios $P(x)/Q(x)$ tiene el mismo límite que el cociente de sus términos directores. Por ejemplo,

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 2x^2 + 6) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 = +\infty$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 6}{2x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}x^2 = +\infty$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 6}{2x^3 + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{2x^3} = \frac{3}{2}$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 6}{x^4 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$.

Dos propiedades de las funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado

Por último, llegamos a importantes conclusiones sobre las funciones continuas en intervalos cerrados, en concreto a: la *Propiedad de los Valores Extremos* (conocida como Teorema de Weierstrass) y la *Propiedad de los Valores Intermedios* (conocida como Propiedad de Darboux).

Propiedad de los Valores Extremos: Una función f continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ tiene valor máximo M y valor mínimo m . Hay, pues, al menos dos números x_{\max} y x_{\min} del intervalo $[a, b]$ donde se alcanzan dichos valores: $f(x_{\max}) = M \geq f(x) \geq m = f(x_{\min})$, para todo $x \in [a, b]$.

Propiedad de los Valores Intermedios: Si f es continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y el número K está entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces hay al menos un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = K$.

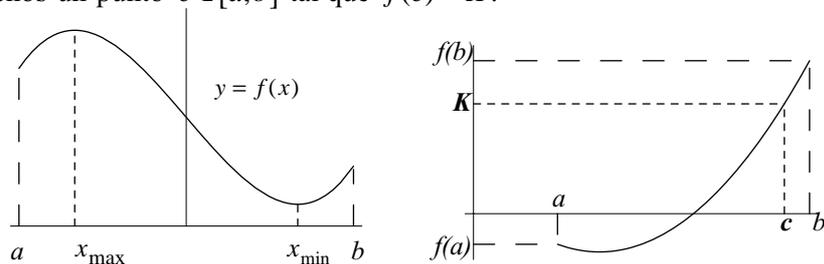


FIGURA 36: Idea gráfica de la propiedad de los valores extremos y de la propiedad de los valores intermedios.

Consecuencias de la propiedad de los valores intermedios:

- Si $f(a)$ y $f(b)$ son números reales de distinto signo, el 0 está entre $f(a)$ y $f(b)$. Por tanto, hay un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$. Esta consecuencia se conoce como *Teorema de Bolzano*.
- Si K está entre el valor máximo M y valor mínimo m , entonces $f(c) = K$, para algún c entre x_{\min} y x_{\max} .

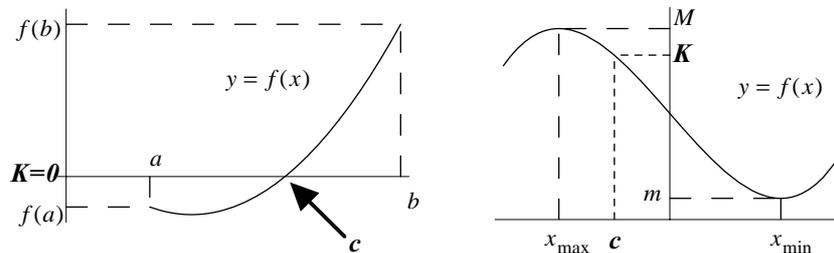


FIGURA 37: Idea gráfica de las consecuencias: Teorema de Bolzano y valores intermedios entre los óptimos.

El Teorema de Bolzano es, para nuestra intuición geométrica, trivial, pues expresa simplemente que una curva continua que comienza debajo del eje X y termina encima de él, o recíprocamente, debe cortarlo. Y, sin embargo, este teorema tan sencillo tiene consecuencias matemáticas, en algunos casos, desconcertantes.

Ahora vamos a observar la importancia de las dos hipótesis: las funciones son continuas y los intervalos son cerrados. Considérese la función $f(x) = x$; esta función nunca alcanza valor mínimo para $0 < x \leq 1$.

Si definimos $f(0) = 2$, entonces la función sigue sin alcanzar valor mínimo en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Además debido al salto en $x = 0$, tampoco alcanza el valor intermedio 1'7.

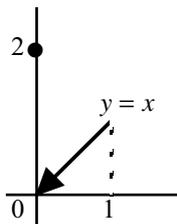


FIGURA 38: Ejemplo de la importancia de las hipótesis de las propiedades.

Ejercicios:

- Usando el Teorema de Bolzano vamos a probar que algún número $-2 < x < -1$ es solución de la ecuación polinómica $x^3 - x + 3 = 0$.
En efecto, la función $f(x) = x^3 - x + 3$ es continua en el intervalo cerrado $[-2, -1]$. Además $f(-2) = (-2)^3 - (-2) + 3 = -3 < 0$ y $f(-1) = 3 > 0$.
Entonces, por la propiedad de los valores intermedios, hay algún número $-2 < x < -1$ tal que $x^3 - x + 3 = 0$.

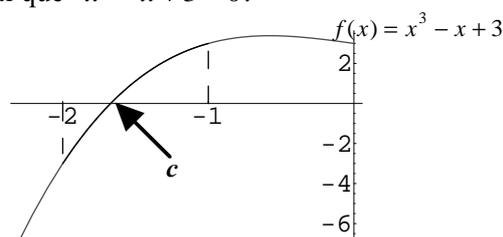


FIGURA 39: Solución de la ecuación $x^3 - x + 3 = 0$.

- ¿Toma la función $f(x) = \frac{x^3}{4} - \text{sen}\pi x + 3$ el valor $\frac{3}{2}$ en el intervalo $[-2, 2]$?
De nuevo la respuesta la encontramos usando la propiedad de los valores intermedios. Como $f(x) = \frac{x^3}{4} - \text{sen}\pi x + 3$ es continua en el intervalo $[-2, 2]$ y $K = \frac{3}{2}$ es un valor entre $f(-2) = 1$ y $f(2) = 5$, entonces existe al menos un $c \in (-2, 2)$ tal que $f(c) = \frac{3}{2}$.

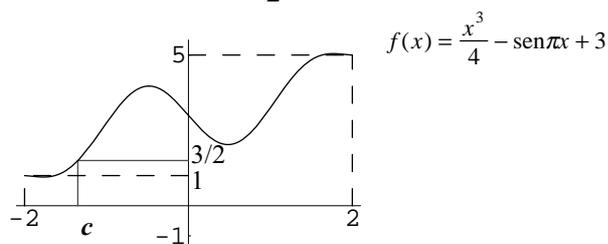


FIGURA 40: Aplicación de la propiedad de los valores intermedios.

- Vamos a comprobar que la función $f(x) = e^{-x^2}$ alcanza máximo y mínimo en el intervalo $[-1, 1]$ y a determinar sus valores.
La función $f(x) = e^{-x^2}$ es continua en el intervalo cerrado $[-1, 1]$; luego, por la propiedad de los valores extremos, $f(x) = e^{-x^2}$ alcanza valor

máximo M y valor mínimo m en $[-1,1]$.

Otro problema distinto es averiguar cuáles son estos valores y dónde se alcanzan. Como la función es sencilla podemos abordar y resolver el problema. Los comentarios que siguen son evidentes si se mira la gráfica de la función. En primer lugar, la función es par, es decir, simétrica respecto al eje Y. Además, la función decrece en $[0,1]$, pues, al aumentar los valores de la x , disminuye el exponente $-x^2$, y, por tanto, disminuye e^{-x^2} .

Está claro: $M = f(0) = 1$ y $m = f(-1) = f(1) = \frac{1}{e} \approx 0.37$.

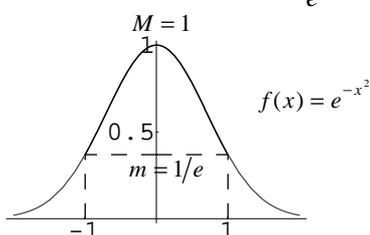


FIGURA 41: Aplicación de la propiedad de los valores óptimos.

El Teorema de Weierstrass afirma la existencia de máximo y mínimo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado. Ahora bien no dice nada acerca de la existencia de valor máximo o mínimo de una función no continua, o de una función continua sobre un intervalo abierto o sobre toda la recta. Habitualmente, un poco de ingenio, más herramientas del Cálculo y la comprobación de otras propiedades (crecimiento y decrecimiento), nos permitirá revelar la naturaleza de las cosas.