

Tema 6.

La derivada de las funciones reales de una variable real

En este tema trataremos el concepto de derivada, que es sin duda uno de los fundamentales del cálculo. Su estudio y sus aplicaciones son el objeto tanto de este tema como del siguiente.

6.1. Concepto de derivada

El origen,¹ o, mejor dicho, los orígenes, del concepto de derivada se encuentran en la necesidad de medir la velocidad instantánea de variación de una magnitud física respecto al tiempo, en la necesidad de determinar la tangente a una curva y en la necesidad, de casi todas las ciencias, de indagar sobre los valores óptimos (máximo y mínimo) de una función.

Empezamos describiendo el problema de la velocidad instantánea y el de la tangente a una curva. En ambos llegamos de forma natural al cociente de incrementos $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ o $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, que, en el límite, cuando $\Delta t \rightarrow 0$ o cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se adopta como revelador de la velocidad instantánea y de la recta tangente, respectivamente.

La velocidad media y la velocidad instantánea

En el estudio de los cuerpos en movimiento es importante dar una expresión de la velocidad de un móvil en un instante dado. Supongamos que en t horas un cuerpo recorre un camino de longitud igual a d , entre los puntos A y B. Se dice *velocidad media* del móvil en su trayecto a

$$v_{med} = \frac{d}{t}.$$

Es claro que la velocidad media no da información sobre la velocidad en un punto concreto de la trayectoria, pudiendo darse el caso de que el cuerpo estuviese parado, estuviese retrocediendo el camino o fuese con más o menos

¹ Es muy interesante la lectura del texto «Historia de las Matemáticas» de Call B. Boyer, publicado por la editorial Alianza Universidad en 1968.

rapidez en ese momento. Para obtener esa información necesitaremos estudiar el móvil en cada instante.

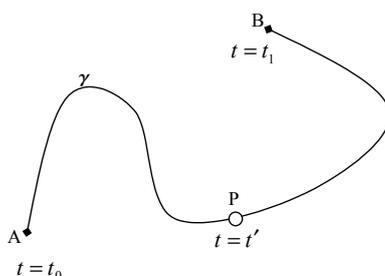
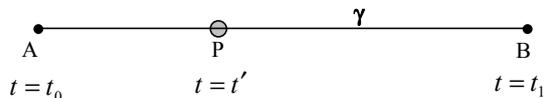


FIGURA 1: Si la longitud de la curva γ es d y P recorre γ en el tiempo $T=t_1 - t_0$, entonces la velocidad media es $v = d / (t_1 - t_0)$.

Si deseamos obtener la velocidad en un instante t_0 concreto, necesitaremos información sobre el móvil en los momentos próximos a t_0 . Supongamos que P recorre un camino rectilíneo, que su posición en cada tiempo t es conocida y viene dada por $s(t)$.



La *velocidad instantánea* de P en t_0 , que escribimos $v(t_0)$, se define como el límite de las velocidades medias en intervalos de tiempo Δt , siempre que este límite exista. Es decir, si $s(t_0)$ y $s(t_0 + \Delta t)$ son, respectivamente, las posiciones de P en t_0 y $t_0 + \Delta t$, entonces la velocidad media de P desde el instante t_0 hasta $t_0 + \Delta t$ es $\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$ y, por lo tanto, la velocidad instantánea será:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Ejemplo: La posición de un punto P que se mueve sobre una recta está dada por $s(t) = 3t^2 - 2t$ metros en t minutos. Determina la velocidad en el instante $t = 0$ y en $t = 1$. ¿En qué intervalo de tiempos P se aleja del origen? ¿En qué intervalo P se acerca al origen? ¿En qué instantes la velocidad de P es nula?

Considerando la definición en t , $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$ se tiene

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[3(t + \Delta t)^2 - 2(t + \Delta t)] - [3t^2 - 2t]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[3(2t\Delta t + \Delta t^2) - 2\Delta t]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 3(2t + \Delta t) - 2 = 6t - 2. \quad \text{Así, } v(0) = -2 \text{ y } v(1) = 4. \text{ Además, el punto se}$$

alejara del origen entre $t = 0$ y $t = 1/3$ con velocidad negativa, es decir, en sentido del eje negativo. Se acercara si $1/3 < t < 2/3$ y se volvera a alejar cuando $2/3 < t$, en ambos casos con velocidad positiva o, lo que es igual, en el sentido del eje positivo. Obviamente, la velocidad sera nula en $t = 1/3$, ver figs. 2 y 3.

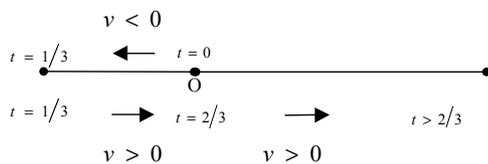


FIGURA 2: Representación del movimiento de un cuerpo sobre un camino rectilíneo. El signo de la derivada indica el sentido del movimiento.

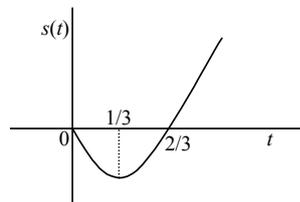


FIGURA 3: Representación de la función espacio recorrido por un cuerpo en cada instante de tiempo. El signo de $s(t)$ indica la posición respecto del origen

Ejercicio: Si la posición de un móvil sobre el eje es $s(t) = t^3 - 1$ cm a los t segundos. Determina la velocidad en el instante t cualquiera.

La pendiente de la secante y de la tangente a una curva

Dada una función $y = f(x)$ con $f: I \rightarrow \mathbf{R}$, I intervalo abierto en \mathbf{R} , se dice que existe recta tangente a la gráfica de f en un punto $(a, f(a))$ si existe el límite

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Geoméricamente, el valor $\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ corresponde a la pendiente de una

recta secante, la que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$; se define la recta tangente como el límite de rectas secantes cuando $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ se aproxima a $(a, f(a))$, es decir, cuando $\Delta x \rightarrow 0$ (ver fig. 4). Así, siempre que exista

el límite $m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ es la pendiente de la recta tangente.

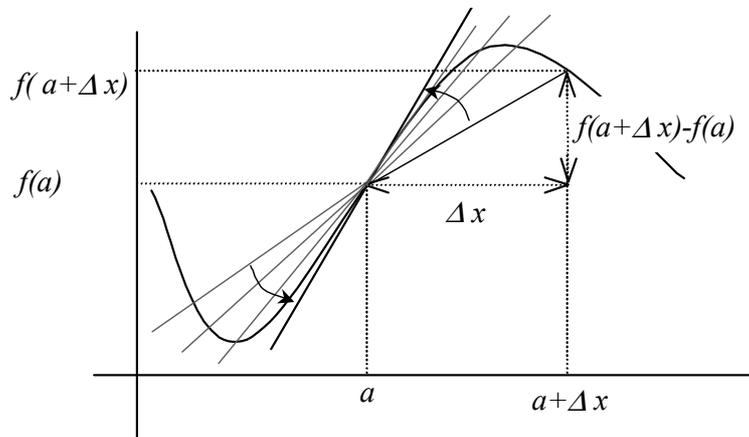


FIGURA 4: La recta tangente es, si existe, el límite de rectas secantes.

Ejemplo: Calcular la recta tangente a la gráfica de $y = x^2$ en (a, a^2) .

La ecuación de una recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y de pendiente m es $y - y_0 = m(x - x_0)$. Simplemente, debemos determinar la pendiente, es decir, calcular el límite anterior.

$$\begin{aligned} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} &= \frac{(a + \Delta x)^2 - a^2}{\Delta x} = \frac{a^2 + \Delta x^2 + 2a\Delta x - a^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x^2 + 2a\Delta x}{\Delta x} = \\ &= \frac{\Delta x(\Delta x + 2a)}{\Delta x} = \Delta x + 2a. \text{ Así, } m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2a) = 2a. \end{aligned}$$

La recta tangente será $y - a^2 = 2a(x - a) \Rightarrow y = 2ax - a^2$.

Ejercicio: Obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = -x^2 + 6x$ en $(4, y(4))$.

Puede ocurrir que el límite que define m no exista en un punto P . Si los límites laterales coinciden pero son infinitos ($\pm\infty$), nos indicarán que $\tan(\theta) = \pm\infty$, entonces $\theta = \pi/2$ o $3\pi/2$, respectivamente, es decir, la recta tangente existe pero es vertical (fig. 5). Si, por el contrario, no coinciden los límites laterales, entonces el límite no existe ni la recta tangente en P . Este caso corresponde geoméricamente con la existencia de un «pico» en la gráfica de f en P (ver fig. 6).

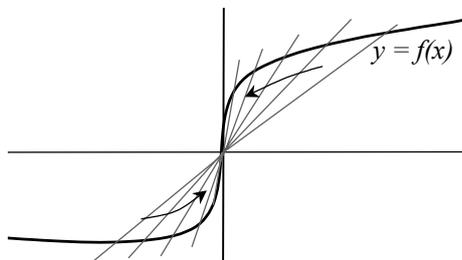


FIGURA 5: Tangente vertical en (0,0).

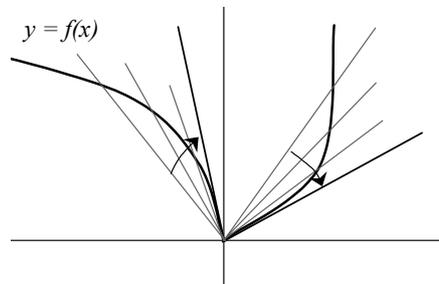


FIGURA 6: No existe recta tangente en (0,0).

La derivada de una función $f(x)$

Pensamos que ahora ya estamos preparados para aceptar sin prevención la definición de función derivable en un punto interior del dominio. De su lectura debe deducirse que contiene como casos particulares la idea de velocidad instantánea t , la de la pendiente de una curva.

Consideraremos que $y = f(x)$ es una función real definida en un intervalo abierto I .

Definición: La derivada respecto de x de $y = f(x)$ en x_0 viene dada por

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

siempre que este límite exista.

Notación: Si se presenta la función como $y = f(x)$, se puede utilizar indistintamente las notaciones

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = y'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0),$$

pero si se da como $f(x)$ se utilizan las dos primeras.

Definición: La función $y = f(x)$ es derivable en I si es derivable en todo punto de I .

Si $y = f(x)$ es derivable en I , podemos definir una nueva función que nos proporcione la derivada de y en x . Esta función se llama *función derivada de f* o simplemente *derivada de f* en I y la denotaremos por

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = y' = \frac{dy}{dx}.$$

Notamos que el dominio de definición de f' está formado por los puntos en los que f posee derivada, por lo que estará contenido en I . El valor de la función derivada en un punto a nos dará la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en a .

$$f'(a) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = y'(a)$$

La derivada no estará definida en puntos del dominio de $y = f(x)$ en los que:

- $y = f(x)$ no sea continua.
- la gráfica de f tenga un «pico» en ese punto.
- la gráfica de f tenga en ese punto una tangente vertical.

Es el momento de calcular la derivada de algunas funciones sencillas mediante la definición, es decir, calculando el límite del cociente de incrementos. Así, por ejemplo, calculamos la derivada de la función constante $y = C$, de la función logaritmo neperiano $y = \ln x$ y de las funciones trigonométricas $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Vamos a calcular las derivadas de algunas funciones más conocidas:

- $y = C : y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$.
- $y = \ln x$: Utilizamos las propiedades del logaritmo, entre ellas la continuidad; así, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln((x + \Delta x)/x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln((x + \Delta x)/x)^{\frac{1}{\Delta x}} =$
 $= \ln \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\Delta x}{x} \right]^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\Delta x}{x} \right]^{\frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x}} = \ln \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\Delta x}{x} \right]^{\frac{x}{\Delta x}} \right)^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$.
- $y = \sin x$:
 $(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \frac{\cos x \operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \right). \text{ En el tema 5 se mencionó que}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} = 0 \text{ y } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = 1 \text{ entonces el límite de cada sumando existe}$$

por lo que $(\operatorname{sen} x)' = \operatorname{sen} x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = \cos x$.

• $y = \cos x$:

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \Delta x - \cos x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \right), \text{ por el mismo razonamiento que en el}$$

ejemplo anterior $(\cos x)' = \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \operatorname{sen} x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = -\operatorname{sen} x$.

Ejercicio: Calcular $f'(x)$ si $f(x) = x + 1/x$. Determinar la pendiente de la tangente en $x = 1$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(x + \Delta x + \frac{1}{x + \Delta x} \right) - \left(x + \frac{1}{x} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + \left(\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} \right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x - (x + \Delta x)}{\Delta x (x + \Delta x)x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\Delta x}{\Delta x (x + \Delta x)x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{(x + \Delta x)x} \right) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Luego $f'(1) = 0$.

El siguiente resultado dice «toda función derivable es continua». Parece evidente que la derivabilidad suponga un progreso sobre la continuidad si tenemos presente el significado de ambas ideas en terminos de incrementos. Recordémoslas una vez más: la continuidad significa que $\Delta f \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$, y la derivabilidad va más allá y compara cómo tienden a cero ambos incrementos, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x)$.

El enunciado preciso de la propiedad es:

Propiedad: Si una función f es derivable en $a \in I$, entonces f es continua en a .

En efecto, basta expresar $f(x)$ de la siguiente manera:

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a),$$

y considerar algunas propiedades de los límites junto con la hipótesis de que f es derivable en a . Así, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(a) + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) = f(a) + f'(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f(a)$. Por lo tanto, f es continua en a .

La propiedad recíproca no es cierta, es decir, existen funciones continuas que no son derivables. Para probar este hecho daremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo: La función $f(x) = |x|$ es continua en $x=0$ y no es derivable.

Estudiamos el límite de la definición de derivada de f en 0 mediante los límites laterales y obtenemos que son distintos, ya que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$; por lo tanto, concluimos que dicho límite no existe.

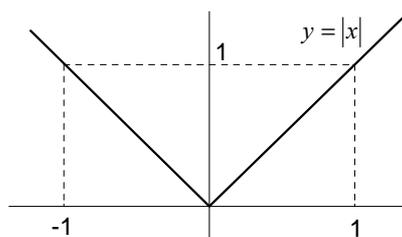


FIGURA 7: Función $y = |x|$.

6.2. Reglas elementales del cálculo de derivadas

Ya conocemos el concepto de derivada e incluso hemos calculado algunas, pero la tarea de calcular una derivada usando su definición no es fácil, ya que depende de saber hallar un límite. Ciertamente, en algunas ocasiones, afortunadamente muy pocas, no tenemos otra opción que calcular el límite del cociente de incrementos. Pero la vida es más fácil y el cálculo de las derivadas de las funciones que habitualmente manejamos es sencillo, una vez que hayamos recordado unas cuantas propiedades que nos proporcionan reglas para derivar.

Regla de la suma. Linealidad de la derivación

Propiedad: Dadas $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en $x \in I$, I intervalo abierto, se tiene :

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x).$$

En efecto, $(f + g)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(f+g)(x + \Delta x)] - [(f+g)(x)]}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$
$$= f'(x) + g'(x).$$

Propiedad: Dada $f(x)$ una función derivable en $x \in I$, I intervalo abierto y $\lambda \in \mathbf{R}$, se tiene:

$$\frac{d}{dx}(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f'(x).$$

En efecto, $(\lambda f)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\lambda f)(x+\Delta x) - (\lambda f)(x)}{\Delta x} = \lambda \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lambda f'(x).$

Con estas dos propiedades se deduce de forma inmediata la linealidad de la derivación.

Propiedad: *Linealidad de la derivación.* Dadas $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en $x \in I$, I intervalo abierto y $\lambda, \beta \in \mathbf{R}$, se tiene :

$$\frac{d}{dx}(\lambda f + \beta g)(x) = \lambda f'(x) + \beta g'(x).$$

Estos resultados siguen siendo válidos para un número finito de sumandos.

Regla del producto

Propiedad: Dadas $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en $x \in I$, I intervalo abierto, se tiene:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

En efecto,

$$(fg)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x + \Delta x) - (f \cdot g)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)] \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

Este resultado se puede generalizar de forma inmediata a un número finito de factores.

Regla de la función recíproca: $1/f$. Regla del cociente

Propiedad: Dada $f(x)$ una función derivable en $x \in I$, I intervalo abierto y tal que $f'(x) \neq 0$, se tiene:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f} \right) (x) = - \frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{f} \right)' (x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{f} \right) (x+\Delta x) - \left(\frac{1}{f} \right) (x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x+\Delta x)} - \frac{1}{f(x)}}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x)f(x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(x+\Delta x)}{\Delta x} \frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)} \right) = - \frac{f'(x)}{f(x)^2}.
\end{aligned}$$

Utilizando las dos propiedades anteriores se deduce directamente la regla para el cociente de dos funciones.

Propiedad: Dadas $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en $x \in I$, I intervalo abierto, si $g(x) \neq 0$, se tiene:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Ejercicio: Demostrar la regla del cociente.

Regla de la potencia

Propiedad: Sea $f(x) = x^n$, función derivable en $x \in I$, I intervalo abierto y $n \in \mathbf{N}$, se tiene :

$$\frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1}.$$

Se puede comprobar por inducción considerando la regla del producto y que $y' = 1$ si $y = x$, o también, se puede demostrar utilizando el *desarrollo de Newton*² en la definición

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x \Delta x^{n-1} + \binom{n}{n} \Delta x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \dots + \binom{n}{n-1} x \Delta x^{n-2} + \binom{n}{n} \Delta x^{n-1} \right) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Ejemplo: Hallamos la derivada de $y = (2x^2 + x) \cdot \ln x$.

$$\begin{aligned} y' &= (2x^2 + x)' \cdot \ln x + (2x^2 + x) \cdot (\ln x)' = (4x + 1) \cdot \ln x + (2x^2 + x) \cdot \frac{1}{x} = \\ &= (4x + 1) \ln x + (2x + 1). \end{aligned}$$

Ejemplo: Si el número de factores es mayor, se procede de igual forma; por ejemplo, la derivada de $y = (4x + 1) \cdot (2x^2 - x) \cdot (x^3 - 8x)$ en x es:

$$\begin{aligned} y' &= [(4x + 1)(2x^2 - x)]' \cdot (x^3 - 8x) + [(4x + 1)(2x^2 - x)] \cdot (x^3 - 8x)' = \\ &= [(4x + 1)' \cdot (2x^2 - x) + (4x + 1) \cdot (2x^2 - x)'] \cdot (x^3 - 8x) + (4x + 1)(2x^2 - x) \cdot (3x^2 - 8) = \\ &= (4(2x^2 - x) + (4x + 1)(4x - 1)) \cdot (x^3 - 8x) + (8x^3 - 2x^2 - x) \cdot (3x^2 - 8) = \\ &= 48x^5 - 10x^4 - 260x^3 + 32x^2 + 16x. \end{aligned}$$

Ejemplo: Veamos una aplicación de la regla del cociente. La derivada de la

función $y = \frac{6x}{x^2 + 4}$ es $y' = \frac{6(x^2 + 4) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{6(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2}$.

Ejercicio: Derivar la función $y = \frac{3x^2 - 1}{2x^3 + 5x^2 + 7}$.

² ver anexo A.

6.3. Regla de la cadena o regla para derivar una función compuesta

Continuando con la línea del apartado anterior, es fundamental conseguir el método mecánico para derivar una función compuesta, método conocido como *regla de la cadena*, que se ha de saber manejar sin vacilación.

La regla de la cadena

El enunciado sobre la derivada de una función resultado de componer otras funciones derivables es:

Teorema (regla de la cadena): Dada f definida en el intervalo abierto I y g definida en $f(I)$. Si f es derivable en $x \in I$ y g es derivable en $u=f(x)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en x y

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Daremos a continuación una demostración simplificada de este teorema. En ella supondremos que $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \neq 0$ siempre que $\Delta x \neq 0$. Probamos la derivabilidad de $g \circ f : I \rightarrow \mathbf{R}$ en x mediante la definición.

$$(g \circ f)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x + \Delta x) - (g \circ f)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x},$$

podemos dividir y multiplicar por $\Delta f \neq 0$; además, como f es derivable en x , se tiene que f es continua en x , por lo que $f(x + \Delta x) \rightarrow f(x)$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y por hipótesis g es derivable en $f(x)$ se tiene

$$(g \circ f)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{f(x + \Delta x) - f(x)} \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) = g'(f(x))f'(x).$$

Ejemplo: Sean $y = \ln u$ y $u = \sin x$, calculamos dy/dx . Podemos hacerlo de distintas formas, sustituyendo en y u por $\sin x$ y derivando después, o bien aplicando la regla de la cadena. Por este último método obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}(u(x)) \cdot \frac{du}{dx}(x) = \frac{1}{u(x)} \cos x. \text{ Basta sustituir } \sin x \text{ por } u \text{ para obtener el}$$

$$\text{resultado buscado, } \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Aplicaciones: Una de las principales aplicaciones de la regla de la cadena es la *generalización de las reglas de derivación* anteriores. Veamos algunos ejemplos.

- $(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$.

Llamamos $y = f(x)$ y $g(y) = y^n$, entonces $\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = g'(f(x))f'(x) = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$.

- $\text{sen}(f(x))' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$.

En este caso aplicamos la regla de la cadena con $g(y) = \text{sen } y$.

Ejemplo: Calcular la derivada de $y = \ln(\cos^4(7x^3 + 6x - 1))$.

$$y' = \frac{4 \cos^3(7x^3 + 6x - 1) \cdot (-\text{sen}(7x^3 + 6x - 1)) \cdot (21x^2 + 6)}{\cos^4(7x^3 + 6x - 1)} =$$

$$y' = -\frac{4 \cdot \text{sen}(7x^3 + 6x - 1) \cdot (21x^2 + 6)}{\cos(7x^3 + 6x - 1)} = -4(21x^2 + 6)\tan(7x^3 + 6x - 1).$$

Ejercicios: Calcular la derivada de $y = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^2$ y de $y = \frac{(1 + \cos(t))^2}{(1 - \text{sen}(t))^3}$.

Derivada de las funciones implícitas

Una curva en el plano se puede representar bien explícitamente por una función, $y = f(x)$ o bien implícitamente por una ligadura entre las variables x e y , $F(x, y) = 0$; sin embargo, no todas las relaciones de este tipo nos determinan una función $y = f(x)$. Las condiciones que se deben cumplir para que esto ocurra, es decir, la ecuación $F(x, y) = 0$ nos determine y como función de x de forma única, nos las proporciona el *teorema de la función implícita*.

El interés de las expresiones del tipo $F(x, y) = 0$ radica en que son las formas que habitualmente maneja la Física y la Técnica para describir la relación entre sus variables.

En lo que sigue supondremos que $F(x, y) = 0$ define una función derivable, $y = f(x)$, tal que $F(x, f(x)) = 0$ para todo x del dominio de f . La derivada de f se calcula por el *método de derivación implícita*, que consiste en derivar en $F(x, f(x)) = 0$ respecto de x , usando la regla de la cadena.

Ejemplo: La ecuación $y^4 - xy^3 + x^3y - 16 = 0$ define implícitamente a y como función derivable en x , $y = f(x)$. Calculamos $y' = f'(x)$ para ello sustituimos $f(x)$ y derivamos la ecuación $f(x)^4 - xf(x)^3 + x^3f(x) - 16 = 0$, $4f(x)^3 f'(x) - f(x)^3 - 3xf(x)^2 f'(x) + 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = 0$, despejando $f'(x)$, se obtiene $f'(x) = \frac{f(x)^3 - 3x^2 f(x)}{4f(x)^3 - 3xf(x)^2 + x^3}$.

Derivada de las funciones inversas

Teorema (Derivada de la función inversa): Sea f definida en el intervalo abierto I tal que f es derivable en $x_0 \in I$ con $f'(x_0) \neq 0$ y posee función inversa g continua en $y_0 = f(x_0)$. Entonces g es derivable en y_0 tal que

$$\frac{dg}{dy}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Geoméricamente, podemos comprobar este resultado. Si representamos la gráfica de $y = f(x)$ y de $x = g(y)$ con la variable libre en el eje de abscisas y los valores de las funciones en el eje de ordenadas (fig. 8), las rectas tangentes a las curvas correspondientes en los puntos $(x, f(x))$ y $(y, g(y))$ tendrán una pendiente igual a $tg\alpha$ y $tg\beta$, respectivamente. Por la simetría de ambas gráficas podemos deducir que $\alpha + \beta = \pi/2$, o, lo que es igual, $tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$.

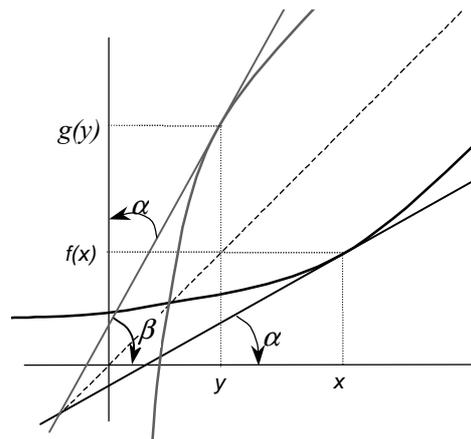


FIGURA 8: Gráficas de funciones inversas.

La ecuación $y = f(x)$ se puede ver como una relación entre las variables x, y de la forma $F(x, y) = 0$. De igual forma su gráfica se interpreta como la curva asociada a $F(x, y) = 0$. Si $f(x)$ posee inversa, es claro que esta relación define implícitamente a x como función de y , siendo esta función la inversa de f , $x = g(y)$. Ambas funciones tienen a la misma curva por gráfica, aunque la segunda tiene representada la variable libre en el eje de ordenadas (fig. 9). La recta tangente en $(x, f(x))$ tendrá una pendiente igual a $\operatorname{tg}\alpha$. Esa misma recta, como recta tangente en $(y, g(y))$, tiene una pendiente igual a $\operatorname{tg}\beta$. Es fácil ver que $\alpha + \beta = \pi/2$, es decir, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$.

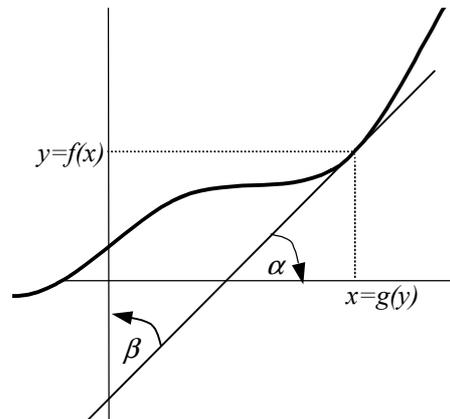


FIGURA 9: Curva asociada a $F(x, y) = 0$.

Ejemplo: Calculamos la derivada de la función $y = e^x$ utilizando la derivada de la función inversa $x = \ln y$. Así, $y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\ln y)'} = y = e^x$.

Ejemplo: Hallamos la derivada de las funciones trigonométricas inversas, $\arcsen x$, $\arccos x$ y $\arctan x$, utilizando la derivación de la función inversa

- $y = \arcsen x \Rightarrow x = \sen y$. Así, $y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\sen y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $y = \arccos x \Rightarrow x = \cos y$. Así, $y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{-1}{\sen y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

- $y = \arctan x \Rightarrow x = \tan y$. Así, $y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$.

Tabla de derivadas

En la siguiente tabla mostramos un resumen de las derivadas de las principales funciones elementales:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C (cte.)	0	$x^\alpha \quad x > 0, \alpha \in \mathbf{R}$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\lg_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
e^x	e^x	$a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$a^x \lg a$
$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{cos} x$	$\operatorname{csc} x$	$-\frac{\operatorname{cotan} x}{\operatorname{sen} x}$
$\operatorname{cos} x$	$-\operatorname{sen} x$	$\operatorname{sec} x$	$\frac{\operatorname{tan} x}{\operatorname{cos} x}$
$\operatorname{tan} x$	$1 + \operatorname{tan}^2 x$	$\operatorname{cotan} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arccos} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctan} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccotan} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$