Tema 7.
Aplicaciones de la derivada de las funciones reales de una variable real

El cálculo de la derivada de una función ha sido el objetivo del tema anterior. En éste, vamos a recoger los frutos; es decir, el esfuerzo dedicado a calcular derivadas tiene una sorprendente recompensa: las derivadas nos proporcionan información de algunas importantes propiedades de la función $y = f(x)$, que era lo que se pretendía. Así, tenemos respuestas para preguntas como éstas: ¿cuál es la variación de y cuando x cambia? o ¿cuál es el valor máximo de y? ¿y el valor mínimo? o…

La derivada $\frac{dy}{dx}$ contiene información de la función cerca del punto; se dice que es una información local. Ahora bien, un paso que daremos en este tema es pasar de esta información local a explicar un trozo más grande de la función, es decir, a una información global. Esta conexión de lo local con lo global es la clave del éxito del cálculo diferencial: es el teorema del valor medio.

En resumen, vamos a usar $\frac{dy}{dx}$ para estudiar y. El guión del tema es el siguiente:

1. *Aproximación lineal. Teorema del valor medio.*
2. *La derivada primera: más aplicaciones.*
3. *La derivada segunda: concavidad.*
4. *La regla de L'Hopital.*
5. *Problemas propuestos.*

7.1. Aproximación lineal. Teorema del valor medio

El concepto de derivada trae consigo una importante aplicación: la aproximación lineal. Su uso está ampliamente extendido en las aplicaciones físicas y técnicas como medio para simplificar expresiones o funciones que la

mayoría de las veces son inmanejables.

Después vamos directos a la piedra angular del cálculo diferencial: el teorema del valor medio, que estudiamos en el último apartado de esta sección. Previamente necesitamos informarnos de las características de los puntos donde se alcanza el máximo y el mínimo de una función.

La aproximación lineal

Supongamos que la función f es derivable en un punto a, es decir, existe $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

En el tema anterior hemos calculado la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = a$, y es $Y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Escribimos la letra mayúscula Y para la recta y la minúscula y para la curva.

La *aproximación lineal* es el resultado de observar que la recta tangente y la curva están muy próximas, siempre que no nos alejemos mucho del punto de contacto a. Así, escribimos:

$$y \approx Y \quad \text{o bien} \quad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Por ejemplo, la función $y = \sqrt{x}$ y su recta tangente en $x = 9$ permiten escribir la siguiente aproximación lineal:

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(x - 4), \text{ es decir, } \sqrt{x} \approx 2 + \frac{1}{4}(x - 4).$$

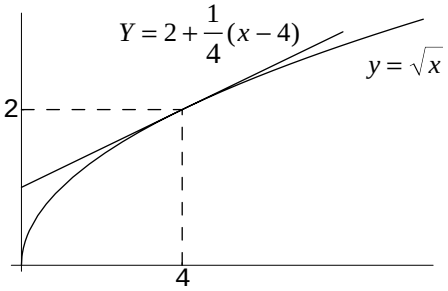

FIGURA 1: Gráfica de la aproximación lineal $\sqrt{x} \approx 2 + \frac{1}{4}(x - 4)$.

En la figura 1 están dibujadas la función $y=\sqrt{x}$ y su recta tangente $Y=2+\frac{1}{4}(x-4)$ en $x=4$. Se aprecia la validez de esta aproximación $\sqrt{x}\approx 2+\frac{1}{4}(x-4)$ para valores cercanos a $x=4$; por ejemplo, $\sqrt{5}\approx 2+\frac{1}{4}(5-4)$, o bien $\sqrt{5}\approx 2'25$.

¿Por qué hemos elegido el punto $x=4$? Esperamos que se aprecie que la «magia» de este punto es que tiene una raíz cuadrada sencilla.

El siguiente comentario ya es casi habitual. Conviene que escribamos la aproximación lineal de diferentes maneras y con distintas notaciones, pues esto ayuda a entender y a saber manejar la idea.

Definición: Para cualquier punto x en el que la función $y=f(x)$ sea derivable, tenemos la aproximación lineal:

$$\textit{pendiente en } x \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

o bien

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$$

En el primer ejemplo de aproximación lineal que viene a continuación vamos a considerar el error que se comete en la aproximación lineal.

Ejemplo: El radio r de un círculo se incrementa desde 2 cm hasta $2'02$ cm. Vamos a evaluar el incremento que se produce en el área, así como la aproximación lineal de este incremento.

El incremento del área es

$$\Delta A = A(r+\Delta r)-A(r)=\pi(2+0'02)^2-\pi 2^2 = 0'08\pi+0'02^2\pi.$$

Calculamos la aproximación lineal del incremento del área $\Delta A\approx A'(r)\cdot\Delta r$, esto es, $\Delta A = A(2+0'02)-A(2)\approx A'(2)\cdot 0'02$. En definitiva:

$$\Delta A\approx 4\pi\cdot 0'02 = 0'08\pi.$$

La aproximación lineal obtenida lleva ligado un error absoluto, un error relativo y un porcentaje de error, que escribimos a continuación:

$$\textit{Error absoluto} = |\Delta A - 0'08\pi| = \left|\left(0'08\pi+0'02^2\pi\right)-0'08\pi\right| = 0'02^2\pi,$$

$$\textit{Error relativo} = \frac{|\Delta A-0'08\pi|}{|\Delta A|} = \frac{0'02^2\pi}{\left(0'08+0'02^2\right)\pi} = \frac{1}{201} < 0'005,$$

$$\textit{Porcentaje de error} = 100\cdot\textit{Error relativo} = 100\frac{1}{201} < 0'5.$$

El siguiente ejemplo pretende poner de manifiesto una de las formas en que más se utiliza la aproximación lineal: aproximar funciones de cierta complejidad por funciones lineales.

Ejemplo: La corriente i de un circuito de resistencia R, inductancia L y fuerza electromotriz E viene dada en el instante t por $i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

Vamos a obtener una fórmula aproximada a la anterior, válida para valores del tiempo t cercanos a 0.

La aproximación lineal de $i(t)$ para valores del tiempo t cerca de 0 es $i(t)\approx i(0)+i'(0)t$. Tras calcular el valor de la derivada $i'(t)=\frac{E}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$ en $t=0$ y sustituir los datos conocidos se obtiene: $i(t)\approx\frac{E}{L}t$.

Se observa que en la fórmula obtenida no aparece la resistencia R, lo cual indica que al comienzo del paso de corriente la influencia de la resistencia es despreciable.

Extremos absolutos. Teorema de Fermat

El camino que nos conducirá al Teorema del valor medio pasa por conocer la condición necesaria (no suficiente) para que un punto del interior del dominio de una función f sea extremo local. Nos referimos al Teorema de Fermat, que se enuncia a continuación.

Teorema de Fermat: Si $y=f(x)$ alcanza su valor máximo o su valor mínimo en el punto c del interior del intervalo I, entonces o bien no existe $f'(c)$ o bien $f'(c)=0$.

Un punto c, en el interior del intervalo I, para el que no existe $f'(c)$ o para el que $f'(c)=0$, se llama *punto crítico de la función* f *en el intervalo* I.

Demostración: Para demostrar el teorema de Fermat sólo es necesario que probemos que, si hay derivada en el punto donde se alcanza el óptimo de la función, ésta debe ser cero. Así pues, suponemos que $y=f(x)$ alcanza su valor, digamos, máximo en el punto c del interior del intervalo I y que $f'(c)$ existe; y debemos probar que $f'(c)=0$.

El cociente incremental $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ es positivo para $x<c$, antes de llegar al máximo, pero es negativo para $x>c$, después del máximo. Por tanto, al pasar al límite tenemos $\lim\limits_{x\to c^-}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$ y $\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$. La consecuencia es que el límite debe ser cero, esto es, $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}=0$.

Proponemos al lector que complete la demostración tratando el caso en que $y=f(x)$ alcanza su valor mínimo en el punto c del interior del intervalo I. El razonamiento es análogo al desarrollado para el caso del máximo.

El Teorema de Fermat es muy útil en la práctica, pero necesitamos más instrumentos para poder afrontar el cálculo de valores óptimos con más garantías de éxito. En la siguiente sección dedicamos gran parte del tiempo al problema de buscar los valores extremos de una función.

Ahora exponemos algunos ejemplos en los que el Teorema de Fermat junto con el Teorema de los valores óptimos de las funciones continuas (Teorema de Weierstrass) son suficientes para calcular el máximo y el mínimo.

Ejemplos: Calculamos los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones: $y=\sqrt[3]{x^2}$ cuando $x\in[-1,2]$ e $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ cuando $x\in[-2,2]$.

1. Como la función $y=\sqrt[3]{x^2}$ es continua en el intervalo $[-1,2]$, tenemos la seguridad, gracias al Teorema de Weierstrass, de que hay un valor máximo M y un valor mínimo m.
   La derivada de $y=\sqrt[3]{x^2}$ es $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.
   El Teorema de Fermat nos permite reducir los puntos con posibilidad de que en ellos se alcance el óptimo a los siguientes:
   — los extremos del intervalo $[-1,2]$: -1 y 2.
   — los puntos interiores del intervalo $[-1,2]$ sin derivada: 0
   — los puntos interiores del intervalo $[-1,2]$ con derivada nula: no hay.
   Discernir en cuál de ellos se alcanza el valor máximo M y en cuál el valor mínimo m es tan sencillo como calcular sus imágenes y observar cuál es la mayor y cuál es la menor. Las imágenes son: $y(-1)=1$, $y(2)=\sqrt[3]{4}$ e $y(0)=0$, luego el valor máximo M es $\sqrt[3]{4}$ y el valor mínimo m es 0.

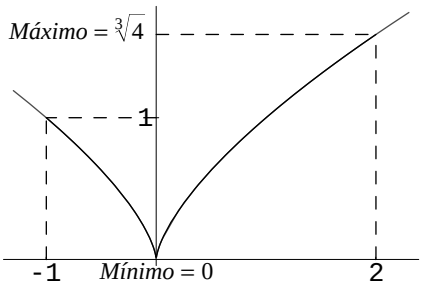

FIGURA 2: Gráfica de la función $y = \sqrt[3]{x^2}$ en el intervalo $[-1, 2]$.

2. También la función $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ es continua en el intervalo $[-2,2]$, y de nuevo, gracias al Teorema de Weierstrass, afirmamos que hay un valor máximo M y un valor mínimo m.
   La derivada de $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ es $y' = \dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.
   Según el Teorema de Fermat, los puntos con posibilidad de que en ellos se alcance el óptimo son los siguientes:
   — los extremos del intervalo $[-2,2]$: -2 y 2.
   — los puntos interiores del intervalo $[-2,2]$ sin derivada: no hay
   — los puntos interiores del intervalo $[-2,2]$ con derivada nula: 0.
   Sus imágenes son $y(-2) = \dfrac{1}{5} = 0'2$, $y(2) = \dfrac{1}{5} = 0'2$ e $y(0) = 1$, luego el valor máximo M es 1, que se alcanza en $x = 0$, y el valor mínimo m es $0'2$, que se alcanza tanto en $x = -2$ como en $x = 2$.

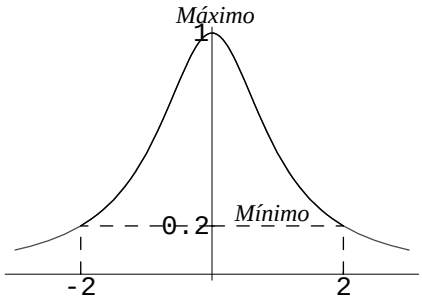

FIGURA 3: Gráfica de la función $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $[-2, 2]$.

El Teorema del valor medio de Lagrange

El Cálculo depende del importante Teorema del valor medio, es decir, depende de conectar o relacionar el cociente de incrementos $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ con la derivada $\frac{df}{dx}$. Es el siguiente teorema:

Teorema del valor medio: Si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y es derivable en el intervalo abierto (a,b), entonces

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \text{ en algún punto } c \in (a,b).$$

Leemos la conclusión del teorema: el primer miembro, que es la velocidad media, es igual a la velocidad instantánea en un punto c. O bien la interpretación geométrica de este teorema es que en todo arco de curva, que sea la gráfica de una función continua en un intervalo cerrado y derivable en el interior, hay por lo menos un punto donde la tangente es paralela a la cuerda.

Fijémonos en la figura 4. Se ve que al aumentar el tiempo t en 4 unidades, la distancia aumenta 120 unidades. Luego la velocidad media es $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{120}{4} = 30$. El teorema afirma que $\frac{df}{dt}$ es igual a 30 en algún punto dentro del intervalo, como efectivamente se aprecia en el gráfico.

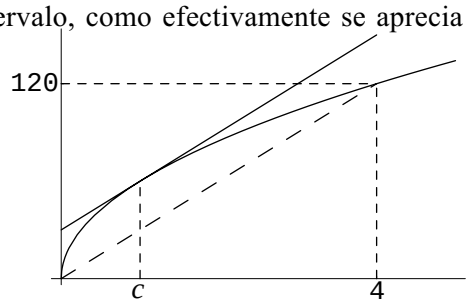

FIGURA 4: Velocidad media igual a velocidad instantánea.

Este Teorema del valor medio no es un teorema constructivo. Queremos decir que el valor del número c no se sabe cuál es, en general, ni es el objetivo obtenerlo; sólo se afirma que existe.

La demostración del Teorema del valor medio se basa en un caso especial del mismo: cuando $f(a)=0$ y $f(b)=0$. En este caso, el suponer que la función comienza en 0 y vuelve a 0 significa que la velocidad media o pendiente media es 0. Habrá que probar, pues, que la velocidad instantánea $f'(c)$ es 0. Este caso particular se llama Teorema de Rolle.

Teorema de Rolle: Supongamos que la función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y es derivable en el intervalo abierto (a,b). Si $f(a)=f(b)=0$, entonces $f'(c)=0$ en algún punto $c\in(a,b)$.

Geométricamente, si f sale de 0 y vuelve a 0, entonces $f'=0$ por el camino. Véase la figura 5.

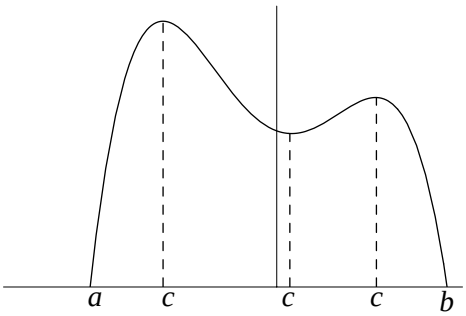

FIGURA 5: Al volver a la misma altura la velocidad instantánea es 0 en uno o más puntos.

Demostración: La clave de la demostración es el Teorema de los valores óptimos de las funciones continuas. Así, al ser la función f continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, alcanza valor máximo y valor mínimo.

En caso de que el punto en el que alcanza el máximo o en el que alcanza el mínimo sea un punto interior del intervalo, entonces el Teorema de Fermat dice que la derivada debe ser 0.

Pero ¿y si tanto el máximo como el mínimo se alcanzan en los puntos extremos del intervalo, en a y en b? Entonces el valor máximo es 0 y el valor mínimo también; en consecuencia, la función es 0 en todo el intervalo. La función constante $y=0$, como todas las funciones constantes, tiene derivada 0.

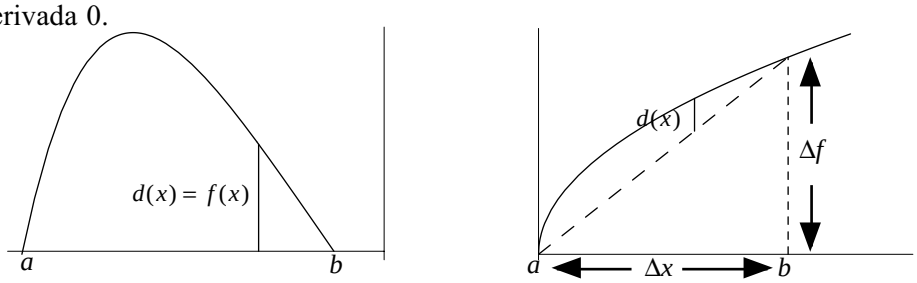

FIGURA 6: Teorema de Rolle, cuando $f(a)=f(b)=0$, y el Teorema del valor medio.

El Teorema de Rolle nos conduce directamente a la demostración del

Teorema del valor medio.

Demostración del Teorema del valor medio: La idea es convertir el problema en el caso especial que está descrito en el Teorema de Rolle. Esto se consigue si usamos la función distancia vertical $d(x)$ entre la curva y la secante (ver la figura), cuya expresión es $d(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{\Delta f}{\Delta x}(x-a) \right]$.

En a y en b, la distancia es $d(a) = d(b) = 0$. La continuidad y la derivabilidad de la función d se deduce de su construcción como resta de f y de un polinomio.

Aplicamos el Teorema de Rolle a $d(x)$ y concluimos que hay un punto interior con $d'(c) = 0$. Derivando la expresión que define a $d(x)$, tenemos: $0 = f'(c) - \frac{\Delta f}{\Delta x}$, con lo cual queda demostrado el teorema.

Una consecuencia de este teorema es el estudio de la monotonía de una función a través del signo de su derivada primera. En la próxima sección nos ocuparemos de escribir este resultado con rigor y de aplicarlo.

En este apartado los adjetivos usados para calificar la importancia de todos los resultados que aparecen puede dar la impresión de que se trata de exageraciones. Ni mucho menos, no exageramos nada.

Una vez más hemos de decir que la siguiente propiedad, consecuencia también del Teorema del valor medio, es fundamental en el cálculo. Dice que las únicas funciones con derivada nula son las constantes, ni una más ni una menos. El enunciado preciso es:

Propiedad: *Las únicas funciones con derivada nula son las constantes*. Es decir, una función f tiene derivada nula en un intervalo I si, y sólo si, f es constante en I.

Demostración: Ya sabemos que toda función constante tiene derivada nula. Ahora la cuestión es: si $f' = 0$ en el intervalo I, entonces ¿ f es constante en I? Por el Teorema del valor medio $\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(c) = 0$, es decir, el incremento que sufre la función f dentro del intervalo I es nulo. Significa, pues, que f permanece constante en I.

Terminamos esta sección volviendo al principio. Queremos comparar la aproximación lineal $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ con la conclusión del Teorema

del valor medio $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$. El resultado de la comparación es: l*a aproximación se convierte en igualdad (el símbolo $\approx$ cambia a $=$) cuando se calcula la derivada en c en lugar de en a.*

Por ejemplo, en la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ tomamos como punto de partida $f(0) = 0$. La aproximación lineal es $\operatorname{sen} x \approx x$, la pendiente de la recta tangente es 1, y la expresión exacta es $\operatorname{sen} x = (\cos c)x$, la pendiente es $\cos c$ en un punto desconocido entre 0 y x (la verdad es que a nadie le importa el valor exacto de c).

Es difícil resistirse a enfrentar la aproximación lineal con la expresión exacta y querer decidir cuál es la mejor, y así olvidar la peor. Nadie puede clasificar en el primer puesto de importancia a una de ellas, porque ambas tienen diferentes cualidades que las hacen útiles en diferentes contextos. Así, la aproximación lineal es útil porque todo se puede calcular (no hay valores ambiguos o desconocidos) y la expresión exacta es también muy interesante porque nos permite comprobar propiedades de la función (como, por ejemplo, $\operatorname{sen} x \le x$, pues $\cos c \le 1$).

Ejercicios: Usamos el Teorema del valor medio para comprobar que $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right) = 0$ y que $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = K$, para $x \neq 0$.

1. En el límite $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$ la diferencia que aparece es el incremento de la función $f(t) = \sqrt{t}$, cuando se toma como punto de partida x al que se aumenta en 2 unidades. Como la función $f(t) = \sqrt{t}$ verifica las condiciones de continuidad y de derivabilidad en $[x, x+2]$ exigidas por el Teorema del valor medio, concluimos que
$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x} = f'(c_x)(x+2-x) = \frac{1}{2\sqrt{c_x}}2 = \frac{1}{\sqrt{c_x}},$$
donde c_x es un valor entre x y $x+2$.
Cuando $x \to +\infty$, también el valor $c_x \to +\infty$ y se deduce que
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{c_x}} = \lim_{c_x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{c_x}} = 0.$$

2. Hay que probar que la función $f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$ es constante.
Para ello calculamos la derivada y observamos que vale 0:
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Observemos que ni f ni f' existen en $x=0$, luego hemos de decir que, por un lado, $f'(x)=0$ en el intervalo $(-\infty,0)$ y que, por otro lado, también f' se anula en el intervalo $(0,+\infty)$. Por tanto, la función $f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$ es constante en cada uno de esos intervalos.

El valor constante en el primer intervalo lo conocemos al calcular la imagen de cualquier $x\in(-\infty,0)$; por ejemplo,

$$f(-1)=\arctan(-1)+\arctan\frac{1}{-1}=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2},$$

luego $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$ cuando $x\in(-\infty,0)$.

El valor constante en el segundo intervalo $(0,+\infty)$ lo obtenemos calculando la imagen de $x=1$:

$$f(1)=\arctan 1+\arctan\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

luego $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ cuando $x\in(0,+\infty)$.

La conclusión es que $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$ es constante en cada uno de los intervalos $(-\infty,0)$ y $(0,+\infty)$, pero la constante es diferente en cada intervalo: $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\begin{cases}-\pi/2, & \text{si } x<0\\ \pi/2, & \text{si } x>0\end{cases}$.

7.2. La derivada primera: más aplicaciones

Al comienzo de este tema ya hemos encontrado y usado una importante consecuencia de la derivada primera: su aplicación para conseguir las aproximaciones lineales. En esta sección avanzamos un poco más en el camino de conseguir información de la función a través de su derivada primera. La idea básica es utilizar el signo de la derivada primera para descubrir la monotonía de la función. A partir de ahí se consigue responder a preguntas como ¿cuántas veces se anula una función? o ¿cuál es el punto en el que la función vale lo máximo posible?

El Teorema del valor medio es el punto de apoyo del estudio de la variación de una función: monotonía y cálculo de sus valores óptimos.

Crecimiento y decrecimiento de una función: El signo de la derivada primera

Hay que empezar con el criterio de monotonía, consecuencia del teorema del valor medio, y así lo hacemos.

Criterio de monotonía: Suponemos que la función f es derivable en un intervalo I.

- Si f' es positiva en todos los puntos del intervalo I, entonces f es creciente en I.
- Si f' es negativa en todos los puntos del intervalo I, entonces f es decreciente en I.

Demostración: Cuando $f'>0$ en I, hemos de comprobar que f es creciente en I. Es decir, un incremento positivo en la variable, $\Delta x>0$, ¿produce un incremento positivo en la función, $\Delta f>0$?

El Teorema del valor medio dice que $\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(c)$, para algún c. Siempre que los valores x y $x+\Delta x$ permanezcan dentro del intervalo I, el valor de c también está en I; luego $f'(c)>0$. La conclusión es que el cociente de incrementos $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ es positivo. De donde se deduce que $\Delta x>0$ produce un incremento positivo en la función, $\Delta f>0$.

Los razonamientos para demostrar el caso decreciente son análogos. Por ello, como en otras ocasiones, proponemos al lector que termine esta demostración.

Como ejemplo, calculamos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones $f(x)=x^2e^{-x}$ y $g(x)=2x^2-\log x$.

Ejemplo 1: La función $f(x)=x^2e^{-x}$ tiene derivada $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$ para todo valor x.

Su derivada $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$ mantiene el mismo signo en cada intervalo determinado por sus raíces. Como la ecuación $x(2-x)e^{-x}=0$ tiene dos soluciones: $x=0$ y $x=2$, entonces el signo de $f'(x)$ es fijo en cada uno de los intervalos $(-\infty,0)$, $(0,2)$ y $(2,+\infty)$. Para averiguar cuál es este signo basta evaluar f' en uno de los puntos de cada intervalo. Así pues,

- $f'(-1) = (-1)3e < 0$, luego $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 0)$;
- $f'(1) = e^{-1} > 0$, luego $f'(x) > 0$ para todo $x \in (0, 2)$;
- $f'(3) = 3(-1)e^{-3} < 0$, luego $f'(x) < 0$ para todo $x \in (2, +\infty)$.

La conclusión es

$$f(x) = x^2 e^{-x} \begin{cases} \text{decrece}, & \text{si } x \le 0 \\ \text{crece}, & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \text{decrece}, & \text{si } x \ge 2 \end{cases}.$$

La gráfica de esta función $f(x) = x^2 e^{-x}$, que está en la figura 7, corrobora el resultado de la monotonía.

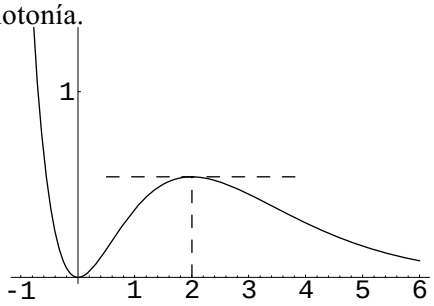

FIGURA 7: Gráfica de la función $y = x^2 e^{-x}$.

Ahora bien, en la gráfica hay más información. Se ve que en $x = 0$ y en $x = 2$, además de que la curva tiene tangente horizontal, hay un mínimo local y un máximo local.

Y si miramos globalmente la función, decidimos que el valor $f(0) = 0$ es el mínimo global de la función, pero que $f(2) = 4e^{-2} \approx 0'54$ no es máximo global de la función (por ejemplo, $f(-1) = e \approx 2'72$ es mayor que $f(2)$). En esta decisión es clave la impresión que da la gráfica sobre el comportamiento de la curva cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$. Parece ser que $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$ y que $\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$.

Ejemplo 2: La función $g(x) = 2x^2 - \log x$ es derivable y su derivada es $g'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$ para todo valor $x > 0$ (el dominio de la función g es $(0, +\infty)$) . La única raíz de la derivada $g'(x) = \frac{4x^2 - 1}{x}$ es: $x = \frac{1}{2}$. Así pues, el

signo de $g'(x)$ es fijo en el intervalo $(0,1/2)$ y también en el intervalo $(1/2,+\infty)$. Como antes, evaluamos g' en uno de los puntos de cada intervalo y así ya sabemos el signo en todo el intervalo:

- $g'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{4(1/16)-1}{1/4}=-3<0$, luego $g'(x)<0$ para todo $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$
- $g'(1)=\frac{4-1}{1}=3>0$, luego $g'(x)>0$ para todo $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$;

La conclusión es: $g(x)=2x^2-\log x\begin{cases}\text{decrece, si } 0<x\le\frac{1}{2}\\ \text{crece, si } x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$. Véase la gráfica de esta función $g(x)=2x^2-\log x$ en la figura 8.

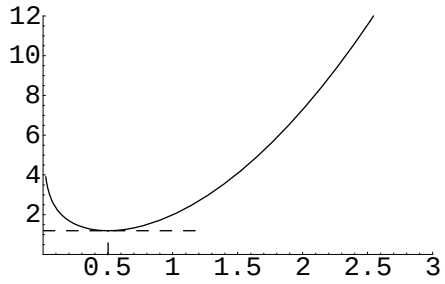

FIGURA 8: Gráfica de la función $g(x)=2x^2-\log x$.

Se ve que en $x=\frac{1}{2}$ la curva tiene tangente horizontal y además hay un mínimo local.

Al mirar globalmente la función decidimos que el valor $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\frac{1}{4}-\log\frac{1}{2}=0'5+\log 2\approx 1'19$ es el mínimo global de la función, pero que no hay máximo global de la función, pues $\lim_{x\to 0^+}\left(2x^2-\log x\right)=+\infty$ y también $\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2-\log x\right)=+\infty$.

Hagamos una observación más: la ecuación $2x^2-\log x=0$ no tiene solución real. Es evidente, dicho en este momento, ya que la función no cruza el eje X. Ha sido necesario el estudio realizado para que esta afirmación sobre la ecuación fuera tan obvia.

Finalmente, estudiamos la monotonía de dos funciones más para conocer ejemplos con alguna característica diferente de los anteriores. En una de estas

funciones su derivada no existe en un punto y en la otra los ceros de la función no son evidentes. Al igual que en los ejemplos anteriores trataremos de ver otras propiedades de la función.

Ejercicios: Calculamos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones: $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$ y $f(x)=\cos x - x$.

1. La derivada de la función $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$ es $f'(x)=\dfrac{1-x}{(1+x)^3}$. Esta derivada no existe en $x=-1$ y se anula en $x=1$. Estos puntos determinan los intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ y $(1,+\infty)$, en los que la derivada mantiene el signo constante.
   Evaluamos f' en uno de los puntos de cada intervalo y así deducimos el signo de la derivada primera:
   - $f'(-2)=\dfrac{3}{(-1)^3}<0$, luego $f'(x)<0$ para todo $x\in(-\infty,-1)$;
   - $f'(0)=1>0$, luego $f'(x)>0$ para todo $x\in(-1,1)$;
   - $f'(3)=\dfrac{1-3}{4^3}<0$, luego $f'(x)<0$ para todo $x\in(1,+\infty)$.

   La conclusión es: $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}\begin{cases}\text{decrece,} & \text{si } x<-1\\ \text{crece,} & \text{si } -1<x\le 1.\\ \text{decrece,} & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

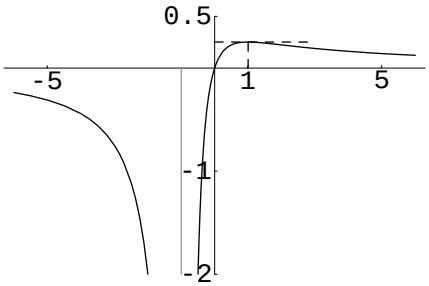

FIGURA 9 : Gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

Además de la monotonía también se observan las siguientes propiedades:

— Hay un máximo local en $x=1$, que además es máximo global: $M=f(1)=\frac{1}{4}$. No hay mínimos locales y, por lo tanto, tampoco hay mínimo global.

— El comportamiento de la función en el infinito viene dado por los siguientes límites: $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(1+x)^2} = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(1+x)^2} = 0$, es decir, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la curva.

— Al acercarse la variable a $x = -1$ se ve que $\lim_{x\to-1} \frac{x}{(1+x)^2} = -\infty$.

2. Al derivar la segunda función $f(x) = \cos x - x$ se obtiene $f'(x) = -\text{sen}x - 1$, que es periódica de periodo 2π. Esta derivada se anula sólo en el punto $x = 3\pi/2$ del intervalo $[0, 2\pi]$ y es negativa en el resto del intervalo. En consecuencia, la función $f(x) = \cos x - x$ es decreciente.
La gráfica de esta función (véase la figura 10) es curiosa, pues se ve una función decreciente que se va doblando alternativamente arriba y abajo.

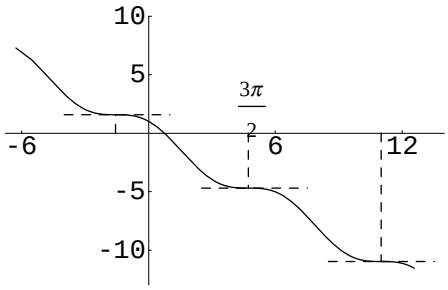

FIGURA 10: Gráfica de la función $f(x) = \cos x - x$.

Obviamente, esta función no tiene máximos ni mínimos, a pesar de que hay puntos con derivada nula.
Ahora sí merece nuestra atención la ecuación $\cos x - x = 0$, cuyas soluciones, de partida, no son fáciles de conocer. Pero ahora, como ya sabemos que $f(x) = \cos x - x$ es decreciente y que pasa de positiva ($f(0) = \cos 0 - 0 > 0$) a negativa ($f(1) = \cos 1 - 1 < 0$), deducimos que la ecuación $\cos x - x = 0$ tiene una única solución y que además esta solución es un número entre 0 y 1.

Valores óptimos de una función: Uso de la derivada primera para clasificar los puntos críticos

En el apartado anterior ya hemos hablado y distinguido la idea de máximo local frente a la de máximo global, y también la de mínimo local frente a la de mínimo global. Estos conceptos son tan habituales en nuestro mundo cotidiano que ha bastado llamar a nuestra experiencia para entender las ideas en los ejemplos.

La próxima definición expone el significado de los óptimos locales y de los óptimos globales. Creemos que se entenderá mejor si escribimos un ejemplo cotidiano. Pensemos en los espacios que los medios de comunicación dedican a la información del tiempo. Es habitual que mencionen las temperaturas observadas el día anterior, y así se puede escuchar que la máxima de Aragón fue 23º y se alcanzó en Zaragoza, mientras que la máxima de España se alcanzó en Sevilla y fue de 31º. Si admitimos que el Servicio Meteorológico sólo recibe las temperaturas del territorio español, la máxima de Aragón es un máximo local, mientras que la máxima de España es un máximo global de las temperaturas. ¿Cuándo se añade el adjetivo local o el adjetivo global? Recomendamos al lector que reflexione sin más dilación sobre la respuesta a esta cuestión.

Definición: Sea f una función definida en un dominio D.

- Un *máximo local de* f es un valor $f(a)$ que es la mayor imagen en las proximidades de a (geométricamente es una cumbre de la gráfica de f).
  Es decir, $f(a)$ es un máximo local de f si existe un intervalo $(a-r, a+r) \subseteq D$ tal que $f(x) \leq f(a)$, para todo $x \in (a-r, a+r)$.
- El *máximo global de* f en D, si existe, es la mayor de todas las imágenes $f(x)$, cuando $x \in D$.
- Un *mínimo local de* f es un valor $f(b)$ que es la menor imagen en las proximidades de b (geométricamente es una valle de la gráfica de f).
  Es decir, $f(b)$ es un mínimo local de f si existe un intervalo $(b-r, b+r) \subseteq D$ tal que $f(b) \leq f(x)$, para todo $x \in (b-r, b+r)$.
- El *mínimo global de* f en D, si existe, es la menor de todas las imágenes $f(x)$, cuando $x \in D$.

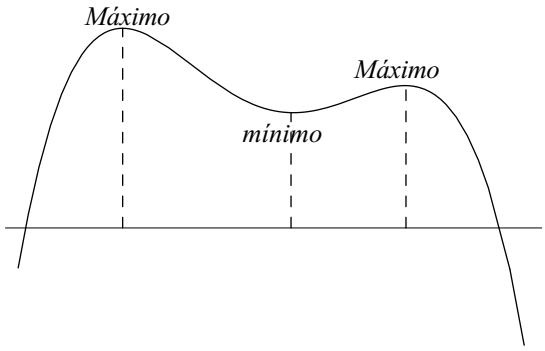

FIGURA 11: Imagen que muestra dos máximos locales y un mínimos local.

Observaciones:

1. Los óptimos locales, o extremos locales, de la función también se llaman óptimos *relativos*; los globales son los *absolutos*.

2. Un extremo local es el extremo absoluto en un dominio suficientemente reducido.
3. Los óptimos globales, si existen, están localizados en uno de los óptimos locales.
4. Los óptimos locales o globales de una función con dominio un intervalo I se alcanzan en un punto crítico de f (puntos interiores de I en los que la función no es derivable o en los que la derivada es nula) o en un extremo del intervalo I de definición de la función.

Ejemplo: Supongamos que hemos de calcular los valores extremos locales y los globales de la función polinómica $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$.

Destaquemos que el dominio de esta función continua y el de su derivada $f'(x) = 12x^2 - 42x + 18 = 6(2x-1)(x-3)$ está formado por todos los números reales, **R**.

Así pues, los puntos en los que se puede alcanzar un valor óptimo de f, si lo hay, son los puntos críticos: $x = \frac{1}{2}$ y $x = 3$. Ahora debemos decidir si en alguno de ellos hay un máximo o un mínimo o ninguna de las dos cosas. Para tomar esta decisión nos puede ayudar la derivada primera de f, es decir, vamos a usar la información que nos da f' sobre el crecimiento y decrecimiento de la función f.

Vemos que el signo de f' es el positivo en el intervalo $(-\infty, 1/2)$, el tramo anterior al punto crítico $x = \frac{1}{2}$, y que f' cambia a signo negativo en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, tras pasar $x = \frac{1}{2}$.

Luego la función continua f crece antes de $x = \frac{1}{2}$ y decrece después de $x = \frac{1}{2}$. Así pues, se concluye que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 24'25$ es un máximo local de f.

Del mismo modo estudiamos el segundo punto crítico $x = 3$. Así, $f' < 0$ en el intervalo $(1/2, 3)$ y pasa a $f' > 0$ en el intervalo $(3, +\infty)$. Es decir, la función continua f decrece antes de $x = 3$ y crece después de $x = 3$. Por tanto, $f(3) = -6$ es un mínimo local de f.

Nos falta saber si los óptimos locales son además globales. Necesitamos conocer el comportamiento de la función en el infinito. Es, pues, preciso saber

que $\lim_{x\to-\infty}\left(4x^3-21x^2+18x+20\right)=-\infty$ y que $\lim_{x\to+\infty}\left(4x^3-21x^2+18x+20\right)=+\infty$, para decidir que la función polinómica $f(x)=4x^3-21x^2+18x+20$ carece de máximo y también de mínimo absoluto en su dominio.

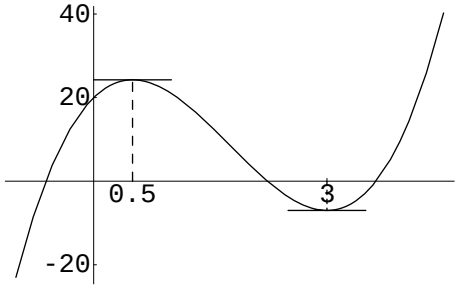

FIGURA 12: Gráfica de $y=4x^3-21x^2+18x+20$.

En el ejemplo anterior hemos usado la derivada primera para clasificar los puntos críticos. Es una propiedad que llamamos criterio de la derivada primera y que enunciamos a continuación.

Criterio de la primera derivada para clasificar los puntos críticos de una función: Suponemos que la función $f(x)$ es continua y tiene un punto crítico en $x=c$.

- Si $f'>0$ antes de c y $f'<0$ después de c, entonces $f(c)$ es un máximo local de f.
- Si $f'<0$ antes de $x=c$ y $f'>0$ después de $x=c$, entonces $f(c)$ es un mínimo local de f.
- Si f' tiene el mismo signo a ambos lados de $x=c$, entonces f no alcanza un valor óptimo en el punto crítico c.

Ejercicios: Hallamos los valores óptimos o extremos de las funciones: $f(x)=2\text{sen}x+\cos 2x$, $g(x)=\sqrt{e^{x^2}-1}$ y $h(x)=\dfrac{1}{2x^4-x+1}$.

1. La función $f(x)=2\text{sen}x+\cos 2x$ es continua y derivable en **R**. Además es periódica, de periodo 2π; por lo cual basta estudiar la función en un intervalo de amplitud 2π, digamos $[0,2\pi]$.
   Los puntos críticos de $f(x)=2\text{sen}x+\cos 2x$ son las raíces de la derivada primera. Una vez calculada $f'(x)=2\cos x-2\text{sen}2x=2\cos x(1-2\text{sen}x)$, deducimos que los puntos críticos de la función f en el intervalo $[0,2\pi]$ son $x=\dfrac{\pi}{6}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{5\pi}{6}$ y $x=\dfrac{3\pi}{2}$.

Usamos el criterio de la derivada primera para decidir en cuál de ellos f alcanza máximo, en cuál mínimo y en cuál nada de lo anterior. Así,

$$\begin{cases} f'>0 & \text{en } [0,\pi/6) \\ f'<0 & \text{en } (\pi/6,\pi/2) \\ f'>0 & \text{en } (\pi/2,5\pi/6) \\ f'<0 & \text{en } (5\pi/6,3\pi/2) \\ f'>0 & \text{en } (3\pi/2,2\pi] \end{cases} \text{, luego } \begin{cases} f(\pi/6)=1'5 \text{ es un máximo local de } f \\ f(\pi/2)=1 \text{ es un mínimo local de } f \\ f(5\pi/6)=1'5 \text{ es un máximo local de } f \\ f(3\pi/2)=-3 \text{ es un mínimo local de } f \end{cases}$$

Como ya hemos dicho, f es periódica, de periodo 2π, de lo que se deducen dos cosas: la primera es que, al añadir múltiplos de 2π a los puntos críticos, conseguimos todos los puntos en los que f alcanza los valores óptimos locales; y la segunda es que el máximo global de la función f es $1'5$ y que el mínimo global de f es -3.

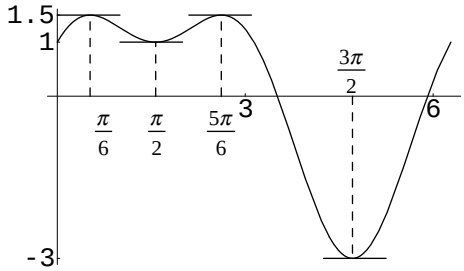

FIGURA 13 : Gráfica de $y = 2\text{sen}x + \cos 2x$.

Esperamos que, por ejemplo, no se confunda el punto $x=\frac{\pi}{6}$ y el valor $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1'5$. Las frases más usadas son: «El valor máximo de f es 1'5 y el punto máximo es $x=\frac{\pi}{6}$», o bien: «El valor máximo de f es 1'5 y se alcanza en el punto $x=\frac{\pi}{6}$».

2. La siguiente función es $g(x)=\sqrt{e^{x^2}-1}$. Se trata de una función continua en su dominio **R** y con derivada $g'(x)=\frac{x.e^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}-1}}$ que no existe en $x=0$.

   El único punto crítico de la función es $x=0$. Como $g'<0$ en el intervalo $(-\infty,0)$ y $g'>0$ en el intervalo $(0,+\infty)$, concluimos que $g(0)=0$ es mínimo local de g. Más aún, el valor 0 es el mínimo global de g.

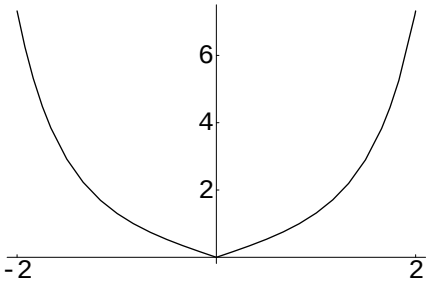

FIGURA 14: Gráfica de $y = \sqrt{e^{x^2} - 1}$.

3. Finalmente, optimizar la función $h(x) = \dfrac{1}{2x^4 - x + 1}$ es algo más complicado si se intenta reproducir directamente el método de los ejemplos anteriores, pues el dominio de la función no es inmediato (hay que saber si se anula el denominador). ¿Podemos hacer que el trabajo sea más sencillo? Desde luego que sí, estudiemos la función del denominador $d(x) = 2x^4 - x + 1$, que es la recíproca de la dada, y obtengamos los máximos y los mínimos de $d(x)$, que son los mínimos y los máximos, respectivamente, de $h(x)$.

   La derivada de la función polinómica $d(x) = 2x^4 - x + 1$ es $d'(x) = 8x^3 - 1$, que sólo se anula en $x = 1/2$. Además $d' < 0$ en el intervalo $(-\infty, 1/2)$ y $d' > 0$ en el intervalo $(1/2, +\infty)$, luego $d\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{8}$ es mínimo local, y global, de d.

   Por tanto, la función del denominador $d(x)$ no se anula y además $h(x) = \dfrac{1}{2x^4 - x + 1}$ alcanza su máximo global $\dfrac{8}{5} = 1'6$ en el punto $x = 1/2 = 0'5$.

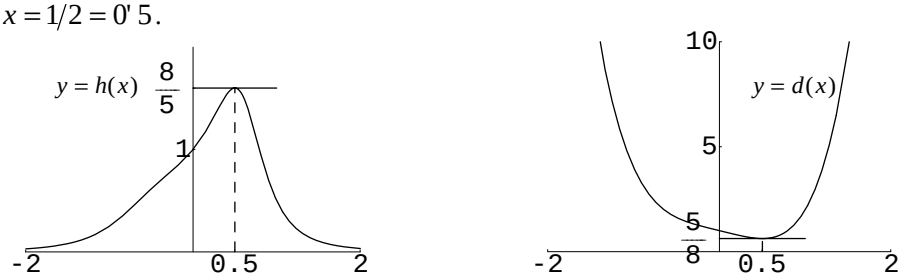

FIGURA 15: Gráfica de la función racional $h(x)$ y de la función del denominador $d(x)$.

Casos prácticos de optimización

El método de cálculo del máximo o del mínimo de una función f es claro: se buscan los puntos con derivada nula, los puntos sin derivada y los puntos extremos del dominio, se estudia la monotonía de la función antes y después de cada uno de ellos y se decide cuál es máximo local, cuál es mínimo local y cuál nada de lo anterior. Si, además, queremos calcular el máximo absoluto y el mínimo absoluto, si los hay, puede que se necesite estudiar el comportamiento de la función en el infinito.

En las aplicaciones al mundo real, el problema comienza antes: hay que elegir la incógnita y buscar la función. Nosotros tenemos la libertad de decidir cuál es la variable x del problema y cuál es la función $f(x)$. Después viene ya la técnica matemática conocida.

Los ejercicios de esta sección comienzan con una descripción de la realidad y hacen una pregunta, en lugar de dar la expresión de una función. Estos ejercicios los resolvemos en tres pasos: 1. Planteamiento del problema en términos matemáticos (decidir la variable y la función), 2. Cálculo de la solución del problema matemático, 3. Interpretación de esa solución en los términos del problema real.

Ejercicio 1: Se corta un alambre de 4 metros de longitud en dos trozos. Un trozo forma un círculo de radio r y el otro forma un cuadrado de lado x. Calcula el valor de r que hace mínima la suma de las áreas del círculo y del cuadrado. Además, calcula r para que dicha suma sea máxima.

1. Planteamiento del problema.
   El enunciado de este ejercicio nos menciona dos variables r, el radio del círculo, y x, el lado del cuadrado.

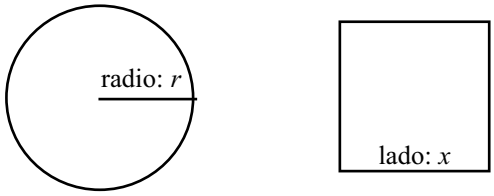

FIGURA 16: El círculo y el cuadrado que se construyen con el alambre dado.

   Ambas variables están ligadas por $2\pi r + 4x = 4$, de donde se deduce que $x = 1 - \frac{\pi}{2} r$.

   Por otro lado, la función suma de áreas $S = \pi r^2 + x^2$ es la que hay que optimizar. Es decir, hemos de calcular los puntos r para los cuales toma

los valores extremos la función $S(r)=\pi r^2+\left(1-\frac{\pi}{2}r\right)^2$.

También hay que saber los valores admisibles de la variable r, es decir, los valores de r con sentido en la realidad del problema. Está claro que $r\geq 0$ y que el mayor valor de r es $2/\pi$, cuando todo el alambre se dedica a construir el círculo.

2. La función $S(r)=\pi r^2+\left(1-\frac{\pi}{2}r\right)^2$ es polinómica de grado 2, continua y derivable. Su derivada es $S'(r)=2\pi r+2\left(1-\frac{\pi}{2}r\right)\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left[(4+\pi)r-2\right]$.

   Los puntos críticos de $S(r)$ son los que anulan a la derivada: $r=\frac{2}{4+\pi}$, y los extremos del intervalo del dominio: $r=0$ y $r=\frac{2}{\pi}$.

   El signo de la derivada primera es $\begin{cases} S'<0, & \text{en } \left[0,\frac{2}{4+\pi}\right) \\ S'>0, & \text{en } \left(\frac{2}{4+\pi},\frac{2}{\pi}\right] \end{cases}$.

   De donde se deduce: $\begin{cases} S(0)=1 \text{ es un máximo local de } S(r) \\ S\left(\frac{2}{4+\pi}\right)=\frac{4}{4+\pi}\approx 0'56 \text{ es un mínimo local de } S(r). \\ S\left(\frac{2}{\pi}\right)=\frac{4}{\pi}\approx 1'27 \text{ es un máximo local de } S(r) \end{cases}$

   La consecuencia es que el valor $\frac{4}{4+\pi}$ es el mínimo absoluto de $S(r)$ y que $\frac{4}{\pi}$ es el valor máximo absoluto de $S(r)$.

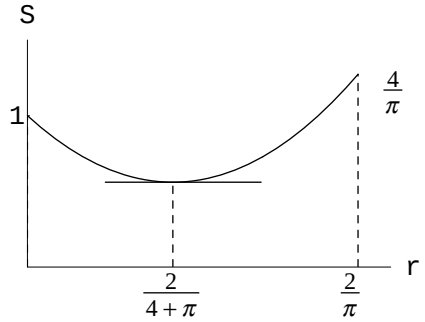

FIGURA 17: Gráfica de la función $S(r)$ suma de las áreas del círculo y del cuadrado.

3. Interpretación en los términos del problema.

- La mínima suma de áreas es $\frac{4}{4+\pi} \approx 0'56$ metros cuadrados, que se consigue cuando el círculo tiene radio $r = \frac{2}{4+\pi} \approx 0'28$ metros y el cuadrado lado $x = \frac{4}{4+\pi} \approx 0'56$ metros.
- La máxima suma de áreas es $\frac{4}{\pi} \approx 1'27$ metros cuadrados, que se consigue cuando todo el alambre se dedica a construir el círculo cuyo radio es $r = \frac{2}{\pi} \approx 0'64$ metros.

Ejercicio 2: Se va a construir un puente sobre un río, de 30 metros de anchura, y va a ser sostenido en cada orilla del río por un pilar de 4 metros de altura, ¿dónde debería colocarse el pie del puente para que su longitud total sea mínima?

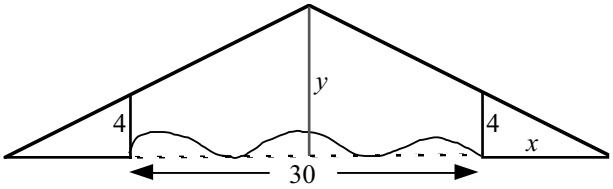

FIGURA 18: Imagen del puente del ejercicio 2.

1. Planteamiento del problema.
   La longitud total del puente es el doble de la longitud de uno de los lados. Buscamos, pues, el valor mínimo de la longitud L de uno de los lados del puente.
   Usamos como variable la distancia x desde la base del pilar hasta el pie del puente; es claro que $x > 0$.
   La función es $L = \sqrt{(15+x)^2 + y^2}$, donde y designa la altura del vértice del puente hasta el río. Como las dos variables x e y están ligadas por la relación de proporcionalidad: $\frac{y}{4} = \frac{15+x}{x}$, de donde se deduce que $y = 4\frac{15+x}{x}$, buscamos en definitiva el mínimo de la función $L(x) = \sqrt{(15+x)^2 + 16\frac{(15+x)^2}{x^2}} = \frac{15+x}{x}\sqrt{x^2+16}$, siendo $x > 0$.

2. La derivada de la función $L(x)$ es

$$L'(x)=\frac{-15}{x^2}\sqrt{x^2+16}+\frac{15+x}{x}\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}=\frac{x^3-15\times 16}{x^2\sqrt{x^2+16}},$$

que sólo se anula en $x=\sqrt[3]{15\times 16}=2\sqrt[3]{30}\approx 6'21$.

Como $L'(x)$ es negativa antes de $x=2\sqrt[3]{30}$ y pasa a ser positiva después, entonces $L\left(2\sqrt[3]{30}\right)$ es el mínimo absoluto.

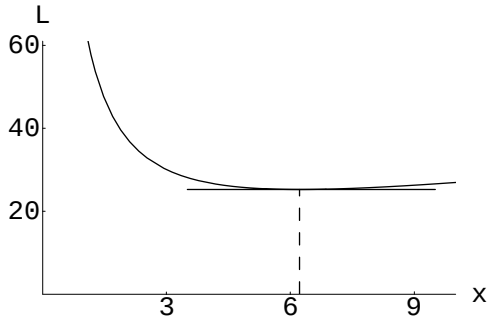

FIGURA 19: Gráfica de la función $L(x)$, longitud de un lado del puente.

3. Interpretación de la solución en los términos del problema.

La longitud mínima del puente es $2\times L\left(2\sqrt[3]{30}\right)\approx 50'46$ metros y se consigue cuando el pie del puente se sitúa a $x=2\sqrt[3]{30}\approx 6'21$ metros del pilar.

El lector no debe pensar que estos problemas de «letra» sólo se pueden plantear de una única manera. Todo lo contrario, la elección de la variable del problema es personal y ello conduce a diferentes planteamientos del mismo.

Por ejemplo, en el problema del puente podemos tomar como variable el ángulo α que forma el puente con la horizontal, siendo $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. En este caso, la longitud es $L=\frac{15+x}{\cos\alpha}$, que, gracias a la relación $\tan\alpha=\frac{4}{x}$, se convierte en la función $L(\alpha)=\left(15+\frac{4}{\tan\alpha}\right)\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{15}{\cos\alpha}+\frac{4}{\operatorname{sen}\alpha}$.

No hay duda de que la solución del problema que se obtenga mediante este último planteamiento debe ser la ya calculada, esto es, que la longitud mínima del puente es 50'46 metros aproximadamente.

Ejercicio 3: ¿Cuál es el punto de la parábola $y = x^2$ más próximo al (0,2)?

Estos problemas de minimizar distancias son los modelos de muchas aplicaciones.

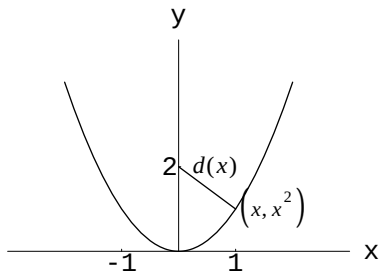

FIGURA 20: Imagen del problema enunciado en el ejercicio 3.

1. Planteamiento del problema. La función cuyo mínimo buscamos es
$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(x^2 - 2\right)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4},$$
donde x es cualquier número real.

2. Vamos a simplificar nuestro trabajo. Es sin duda más fácil estudiar la función $D(x) = d^2(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ que estudiar $d(x)$. Además el punto donde se alcanza el mínimo de $D(x)$ es también el punto donde se alcanza el mínimo de $d(x)$. ¿Por qué? (Una tarea más para el lector). Este truco consistente en transformar el problema de minimizar una distancia en el problema de minimizar su cuadrado ofrece indudables ventajas de cálculo, por lo cual recomendamos su uso.

   Como $D'(x) = 4x^3 - 6x = 2x(2x^2 - 3)$ se anula en $x = 0$ y en $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, ya tenemos los puntos críticos de $D(x)$. Ahora el criterio de la derivada primera nos permite clasificarlos.

   Como $\begin{cases} D' < 0 & \text{en } \left(-\infty, -\sqrt{1'5}\right) \\ D' > 0 & \text{en } \left(-\sqrt{1'5}, 0\right) \\ D' < 0 & \text{en } \left(0, \sqrt{1'5}\right) \\ D' > 0 & \text{en } \left(\sqrt{1'5}, +\infty\right) \end{cases}$, deducimos que $D\left(-\sqrt{1'5}\right) = D\left(\sqrt{1'5}\right) = \frac{7}{4}$ es un mínimo local, y además el mínimo absoluto de $D(x)$. Mientras que $D(0) = 4$ es un máximo local no absoluto.

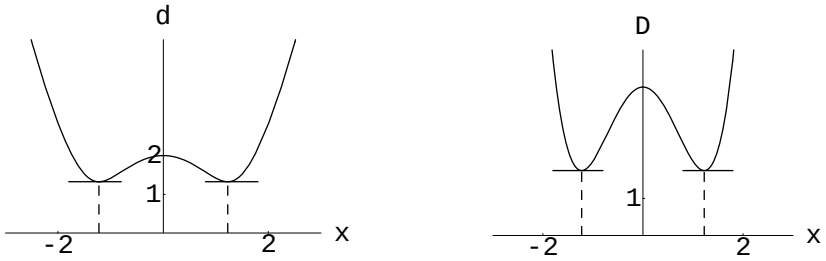

FIGURA 21: Gráfica de la función distancia $d(x)$ y de su cuadrado $D(x)$.

3. La interpretación de la solución: los puntos $\left(\pm\sqrt{1'5}, 1'5\right)$ de la parábola $y = x^2$ son los más próximos al punto (0,2); además esta distancia mínima es $\sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1'32$.

Ejercicio 4: Se desconoce el valor exacto de cierta magnitud x. Se toma su medida experimentalmente y se han obtenido las n mediciones que llamamos x_1, x_2, …, x_n. Se adopta como valor más probable de x el que minimice $S(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(x - x_i\right)^2$ (la suma de los cuadrados de los errores). Halla x.

El problema ya está planteado matemáticamente.

La función $S(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(x - x_i\right)^2$ es un polinomio de grado dos en la variable x, su derivada $S'(x) = \sum_{i=1}^{n} 2\left(x - x_i\right) = 2\sum_{i=1}^{n} \left(x - x_i\right) = 2\left(nx - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ sólo se anula cuando $x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, que es la media aritmética $\bar{x}$ de las mediciones.

Como $S(x)$ es un polinomio de grado dos, el punto crítico $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ es el punto mínimo.

Ejercicio 5: El Principio de Fermat en Óptica dice que la luz viaja de un punto A a otro punto B a lo largo del camino que requiera menos tiempo. Supongamos que la luz viaja a una velocidad v_1 en el medio que está por encima del eje X y a una velocidad v_2 en el medio que está por debajo del eje X.

a. Calcula el tiempo $T(x)$ que tarda la luz en viajar desde A hasta B.
b. ¿Qué ecuación debe verificar el punto x que minimiza el tiempo $T(x)$?

c. Deduce la Ley de Snell: $\frac{\text{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\text{sen}\alpha_2}{v_2}$.

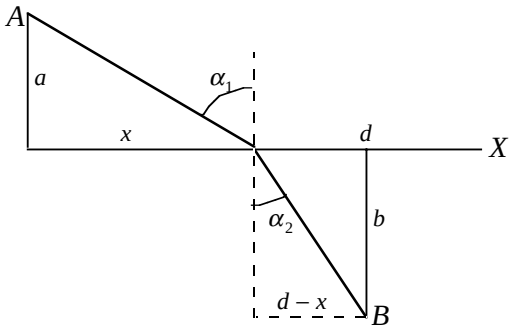

FIGURA 22: Refracción de la luz.

La distancia que recorre la luz en el medio que está por encima del eje X es $\sqrt{a^2+x^2}$, luego el tiempo que emplea la luz en este medio es $\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}$. Del mismo modo, el espacio que recorre la luz en el medio que está por debajo del eje X es $\sqrt{b^2+(d-x)^2}$ y el tiempo empleado es $\frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_2}$. Por tanto, el tiempo que tarda la luz en viajar de A a B es

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_2}, \text{ siendo } x \geq 0.$$

Como la derivada es $T'(x) = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{1}{v_2}\frac{-(d-x)}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$, el punto crítico verifica la ecuación:

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{(d-x)}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

Es decir, $\frac{1}{v_1}\text{sen}\alpha_1 = \frac{1}{v_2}\text{sen}\alpha_2$, conocida como Ley de Snell.

Probamos ahora que ese punto crítico minimiza la función tiempo $T(x)$. Al ser $T'(0) = \frac{1}{v_2}\frac{-d}{\sqrt{b^2+d^2}} < 0$ y $T'(d) = \frac{1}{v_1}\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}} > 0$, concluimos que T' pasa de ser negativa antes del punto crítico a ser positiva después. Así pues, el punto crítico es un punto mínimo de $T(x)$.

7.3. La derivada segunda: concavidad

La derivada primera f' de una función f también admite derivada: la derivada de la derivada $(f')'$ o derivada segunda f''. La reiteración de este proceso conduce a las derivadas sucesivas de la función f: derivada primera, derivada segunda, derivada tercera…

Las derivadas sucesivas de una función en un punto a nos ofrecen la posibilidad de conocer muy bien cómo es la función localmente, pues nos permiten construir el llamado polinomio de Taylor que aproxima a la función en un entorno del punto a. Estos polinomios se caracterizan no sólo por coincidir con la función en el punto de referencia a, sino también por coincidir sus derivadas sucesivas y las de la función en a hasta la de orden del grado del polinomio.

En esta sección fijamos nuestra atención en la derivada segunda y deducimos la información que nos ofrece sobre el comportamiento local de la función. En particular, expondremos la aproximación cuadrática o aproximación de la función mediante el polinomio de Taylor de grado dos.

Las derivadas sucesivas de una función

Si una función f es derivable, a su función derivada f' se le llama *derivada primera* de f.

Si existe la derivada de f', se le llama *derivada segunda* de f y se la denota por f'' o $f^{(2)}$ o $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

Ahora, si existe la derivada de f'', se le llama *derivada tercera* de f y se escribe f''' o $f^{(3)}$ o $\dfrac{d^3 f}{dx^3}$.

Es claro que este proceso se puede reiterar y construir, en general, la derivada de orden n o *derivada n-ésima* de f: $f^{(n)}$ o $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Ejemplos: Calculamos las derivadas sucesivas de $f(x)=x^3$, de $f(x)=\text{sen}x$ y de $f(x)=\begin{cases} 1+x+\frac{x^2}{2}, & \text{si } x<0 \\ 1, & \text{si } x=0 \\ e^x, & \text{si } x>0 \end{cases}$.

1. Las derivadas sucesivas de la función cúbica $f(x)=x^3$ son:
   $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$, $f'''(x)=6$, $f^{(4)}(x)=0$ ….
   Los puntos suspensivos indican que las derivadas siguientes a la derivada cuarta son nulas.

2. La función trigonométrica $f(x)=\text{sen}x$ tiene las siguientes derivadas sucesivas:
   $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\text{sen}x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=\text{sen}x$ …
   Ahora los puntos suspensivos indican que las siguientes derivadas se van repitiendo de cuatro en cuatro, de modo que $f^{(5)}(x)=f'(x)$, $f^{(6)}(x)=f''(x)$, etc.

3. El último ejemplo es una función definida a trozos: $f(x)=\begin{cases} 1+x+\frac{x^2}{2}, & \text{si } x<0 \\ 1, & \text{si } x=0 \\ e^x, & \text{si } x>0 \end{cases}$.
   La función primera derivada y la función segunda derivada existen en todos los puntos y son: $f'(x)=\begin{cases} 1+x, & \text{si } x<0 \\ 1, & \text{si } x=0 \\ e^x, & \text{si } x>0 \end{cases}$, $f''(x)=\begin{cases} 1, & \text{si } x<0 \\ 1, & \text{si } x=0 \\ e^x, & \text{si } x>0 \end{cases}$.
   Sin embargo, la función tercera derivada no existe en $x=0$ y es la función $f'''(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x<0 \\ \text{no existe}, & \text{si } x=0 \\ e^x, & \text{si } x>0 \end{cases}$.
   La figura 23 recoge las gráficas de estas cuatro funciones.

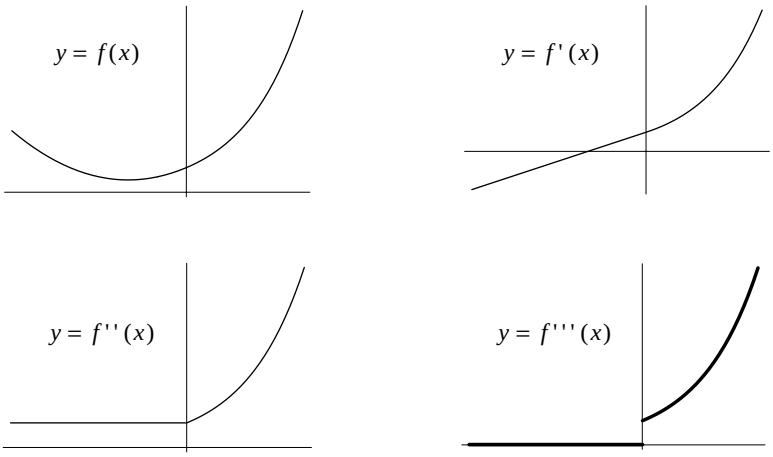

FIGURA 23: Gráficas de la función $f(x)$, de $f'(x)$, de $f''(x)$ y de f''' del ejemplo 3.

Nos hemos dedicado exclusivamente a calcular las derivadas sucesivas de una función. En los siguientes apartados vamos a extraer la información que nos proporciona la segunda derivada f'' sobre la función f.

El signo de la derivada segunda: velocidad de crecimiento, concavidad. Puntos de inflexión

Recordemos que el signo de la derivada primera f' nos informa del crecimiento de f: cuando f' es positiva, f crece; en cambio, cuando f' es negativa, f decrece. Al mirar la gráfica de $y = f(x)$ se aprecia el signo de f' (la pendiente de la curva) y, desde luego, el crecimiento o decrecimiento de f. ¿También se puede notar cuál es el signo de f''?

Unos ejemplos nos van a ayudar a responder a esta pregunta. Se trata de la línea recta $y = mx + b$, de la parábola $y = x^2$ y de $y = \text{sen}x$, cuyas gráficas están en la figura 24.

- La línea recta $y = mx + b$ tiene pendiente m (constante). La derivada segunda es $y'' = 0$. La línea recta $y = mx + b$ no se dobla.
- La parábola $y = x^2$ tiene pendiente $y' = 2x$ (variable). La derivada segunda es $y'' = 2$. La parábola $y = x^2$ se dobla o se curva hacia arriba.
- La curva $y = \text{sen}x$ tiene pendiente $y' = \cos x$ (también variable). La derivada segunda es $y'' = -\text{sen}x$. La curva $y = \text{sen}x$ se dobla hacia abajo, al menos en el tramo $0 \le x \le \pi$.

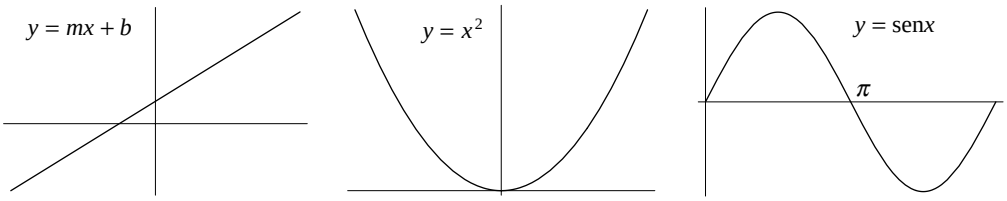

FIGURA 24: Gráficas la línea recta $y = mx + b$, de la parábola $y = x^2$ y de la curva $y = \text{sen}x$.

A partir de ahora vamos a extraer consecuencias del siguiente hecho: la derivada segunda de f es la primera derivada de f': $f'' = (f')'$.

Empezamos por la idea geométrica, que ya se ha esbozado en los ejemplos anteriores, y que dice: f' es la pendiente de la recta tangente y, por tanto, $f'' = (f')'$ mide la variación de las pendientes de las rectas tangentes. Tenemos la siguiente definición:

Definición:

- Una función con $f'' > 0$ es *cóncava hacia arriba (o convexa)*. Es decir, se dobla hacia arriba cuando la pendiente, que es f', crece.
  El hecho de que f' esté creciendo se refleja en la evolución de las rectas tangentes a la curva $y = f(x)$: van girando en el sentido contrario al de las agujas del reloj.
- Una función con $f'' < 0$ es *cóncava hacia abajo*. Es decir, se dobla hacia abajo cuando la pendiente, que es f', decrece.
  Ahora el hecho de que f' esté decreciendo indica que las rectas tangentes a la curva $y = f(x)$ van girando en el sentido de las agujas del reloj.

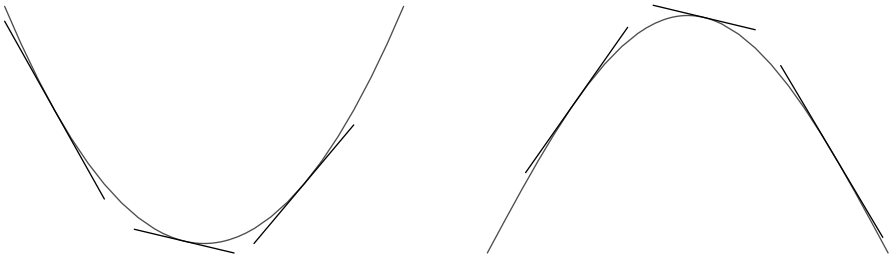

FIGURA 25: Las rectas tangentes a una curva cóncava hacia arriba (a la izquierda) y a otra cóncava hacia abajo (a la derecha).

Aún podemos ver más en las gráficas si miramos las rectas tangentes y la posición que ocupan respecto a la curva.

— Cuando la curva es cóncava hacia arriba ($f''>0$), las tangentes se quedan por debajo de la curva (la aproximación lineal es una aproximación por defecto).
— Por el contrario, cuando la curva es cóncava hacia abajo ($f''<0$), las tangentes están por encima de la curva (la aproximación lineal es una aproximación por exceso).

En segundo lugar, si $y=f(t)$ expresa la distancia recorrida por un móvil, entonces f'' es la aceleración del movimiento. Como $f''=(f')'$, entonces f'' es la velocidad de cambio de la velocidad.

Leamos una vez más que la derivada segunda $f''=(f')'$ es la velocidad con la que cambia f' en el siguiente caso particular. Supongamos que f es una función creciente, es decir, $f'>0$; ¿qué significa $f''>0$? Debemos entender que la velocidad con la que crece f va aumentando.

Proponemos al lector que medite sobre las veces que ha oído mencionar, en los medios de comunicación, los «puntos de inflexión». Recordamos, por ejemplo, que hace pocos días un comentarista de asuntos económicos comunicaba con gran alivio que se había producido un punto de inflexión en la subida de los precios del barril de petróleo. ¿Qué quería expresar? Es posible que todos entendamos lo que nos estaba transmitiendo: aunque el precio f del barril de petróleo continúa creciendo ($f'>0$), se había llegado a un punto en el que algo cambiaba y era que este crecimiento pasaba de ir aumentando a ir disminuyendo (se pasaba de $f''>0$ a $f''<0$).

Así pues, necesitamos el concepto de punto de inflexión, que definimos usando el lenguaje geométrico como sigue:

Definición: Cuando una función f continua es cóncava hacia arriba a un lado del punto $x=c$ y cóncava hacia abajo al otro lado, se dice que el punto $x=c$ es un *punto de inflexión* de f.

¿Cómo obtenemos los puntos de inflexión? El método para el cálculo de los puntos de inflexión se basa en la siguiente propiedad.

Propiedad: Si el punto $x=c$ es un punto de inflexión de f, entonces o bien no existe $f''(c)$ o bien $f''(c)=0$.

Demostración: Únicamente hay que comprobar que si existe $f''(c)$, ésta debe ser 0. Al ser $x=c$ un punto de inflexión de f, tenemos que f' cambia de creciente a decreciente, o, al reves, cambia de decreciente a creciente. Esto

significa que $x = c$ es un máximo local o un mínimo local de f' y, por tanto, la derivada de f' en $x = c$ es 0.

Ejemplo: En la función $f(x) = x^4 - 4x^2$ vamos a señalar los puntos donde la función se anula, los puntos donde se anula la derivada primera f' y los puntos donde se anula la derivada segunda f''.

— La función $f(x) = x^4 - 4x^2$ se anula en cuatro puntos: $x = -2$, $x = 0$ dos veces y $x = 2$.

— La derivada primera $f'(x) = 4x^3 - 8x$ se anula en tres puntos: $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$; en cada uno de ellos la función f alcanza un mínimo, un máximo y un mínimo local, respectivamente.

— Finalmente, la derivada segunda $f''(x) = 12x^2 - 8$ se anula en dos puntos: $x = -\sqrt{2}/\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{2}/\sqrt{3}$; ambos son puntos de inflexión de f. En el primero de ellos la función pasa de ser cóncava hacia arriba a ser cóncava hacia abajo, mientras que en el segundo pasa de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

La tabla muestra los valores importantes de f y el signo de f, de f' y de f'' en cada uno de ellos:

x	-2	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/\sqrt{3}$	0	$\sqrt{2}/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2
$f(x)$	0	$-$	$-$	0,0	$-$	$-$	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

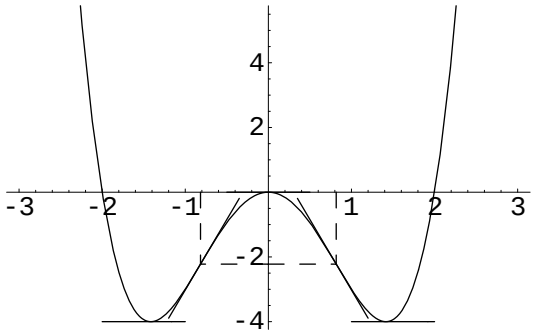

FIGURA 26: Representación gráfica de la función polinómica par $y = x^4 - 4x^2$.

Ejercicios: Vamos a localizar los puntos de inflexión y los intervalos donde son cóncavas hacia arriba o hacia abajo las funciones $f(x)=x+x^2-x^3$ y $g(x)=x+\cos x$.

1. Las derivadas primera y segunda de $f(x)=x+x^2-x^3$ son: $f'(x)=1+2x-3x^2$, $f''(x)=2-6x$, que existen para todo número real x. El único punto de inflexión de f es el punto $x=\frac{1}{3}$, único punto donde se anula la derivada segunda ($f''=0$) y además f pasa de ser cóncava hacia abajo ($f''<0$) antes de $x=1/3$ a ser cóncava hacia arriba ($f''>0$) después de él.

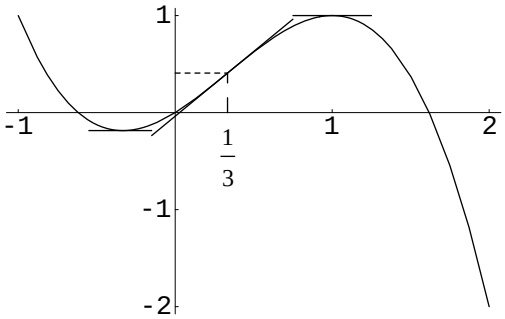

FIGURA 27: La concavidad de la función $f(x)=x+x^2-x^3$.

2. Ahora las dos primeras derivadas de la función $g(x)=x+\cos x$ son las funciones periódicas: $g'(x)=1-\operatorname{sen}x$ y $g''(x)=-\cos x$.

   La derivada segunda se anula en los puntos $x=\frac{\pi}{2}$ y $x=\frac{3\pi}{2}$ del intervalo $[0,2\pi]$. Estos puntos determinan los subintervalos del intervalo $[0,2\pi]$ en los que la derivada segunda mantiene el signo constante. Tenemos:

$$\begin{cases} g''<0, & \text{en } [0,\pi/2) \\ g''>0, & \text{en } (\pi/2,3\pi/2), \\ g''<0, & \text{en } (3\pi/2,2\pi] \end{cases} \text{ luego } \begin{cases} g \text{ cóncava hacia abajo en } [0,\pi/2), \\ g \text{ cóncava hacia arriba en } (\pi/2,3\pi/2), \\ g \text{ cóncava hacia abajo en } (3\pi/2,2\pi], \end{cases}$$

   de donde deducimos que los puntos $x=\frac{\pi}{2}$ y $x=\frac{3\pi}{2}$ son puntos de inflexión de g.

   El estudio se completa diciendo que los puntos de inflexión de g son $x=\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot k$, $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi\cdot k$, debido a la periodicidad de la derivada segunda. En cuanto a la concavidad, si tomamos como referencia los

intervalos $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ en los que g es cóncava hacia abajo y hacia arriba, respectivamente, basta trasladarlos de 2π en 2π unidades para describir de modo completo la concavidad de g.

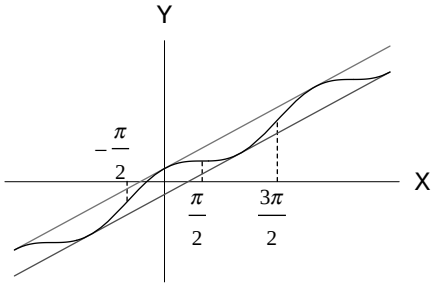

FIGURA 28: La concavidad de la función $g(x) = x + \cos x$.

Otros usos de la derivada segunda: clasificación de los puntos estacionarios y la aproximación cuadrática

Recordemos que los puntos que anulan a la derivada primera de una función, los puntos estacionarios, son candidatos a ser puntos máximos o mínimos locales. La derivada segunda nos ayuda a decidir. La toma de decisiones se hace como indica el llamado criterio de la derivada segunda, que escribimos a continuación.

Criterio de la derivada segunda para clasificar los puntos críticos:

- Cuando $f'(c)=0$ y $f''(c)>0$, f tiene un mínimo local en $x=c$.
- Cuando $f'(c)=0$ y $f''(c)<0$, f tiene un máximo local en $x=c$.

La demostración es muy sencilla. En el primer caso, al ser $f''(c)>0$, la función f' crece en un intervalo I que contiene al punto c. Además $f'(c)=0$ y, por tanto, f'es negativa antes de c y positiva después de c. En definitiva, f alcanza un mínimo local en $x=c$.

El segundo caso, que se comprueba de modo análogo, se queda como ejercicio para el lector.

Hay un caso excepcional: cuando $f'(c)=0$ y también $f''(c)=0$. Puede suceder cualquier cosa. Así, por ejemplo, la función $y=x^3$, cuya primera y segunda derivada son nulas en $x=0$, no alcanza ni máximo ni mínimo en 0;

sin embargo, la función $y = x^4$, cuya primera y segunda derivada también son nulas en $x = 0$, alcanza mínimo en 0.

La derivada segunda permite mejorar notablemente la aproximación lineal. Recordemos la aproximación lineal: $f(x) \approx f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$. En el punto a de referencia se verifica que la función y su aproximación lineal coinciden. Las derivadas primeras también coinciden en $x = a$.

Para conseguir la aproximación cuadrática, exigimos además que las derivadas segundas coincidan en $x = a$, es decir, que el nuevo polinomio aproximante se doble hacia el mismo lado que la función. Esto implica que la aproximación, que el nuevo polinomio, debe contener un término más de la forma $K(x-a)^2$ y que el valor de K queda determinado por $f''(a)$; de hecho, $K = \frac{1}{2} f''(a)$.

En resumen, la *aproximación cuadrática* a una función $f(x)$ cerca de $x = a$ es

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)\cdot(x-a)^2.$$

La aproximación cuadrática no es, desde luego, lo último en aproximaciones. Se consiguen otras añadiendo un término de grado tres $\frac{1}{3!} f'''(a)\cdot(x-a)^3$, un término de grado cuatro $\frac{1}{4!} f^{(4)}(a)\cdot(x-a)^4$, etc. Así se construyen los polinomios de Taylor de grado 3, grado 4, etc.

Ejemplos: Construyamos la aproximación lineal y la cuadrática de algunas funciones en el punto $x = 0$.

- Aproximación lineal (por exceso): $\operatorname{sen} x + \cos x \approx 1 + x$,
  aproximación cuadrática: $\operatorname{sen} x + \cos x \approx 1 + x - \frac{1}{2} x^2$.

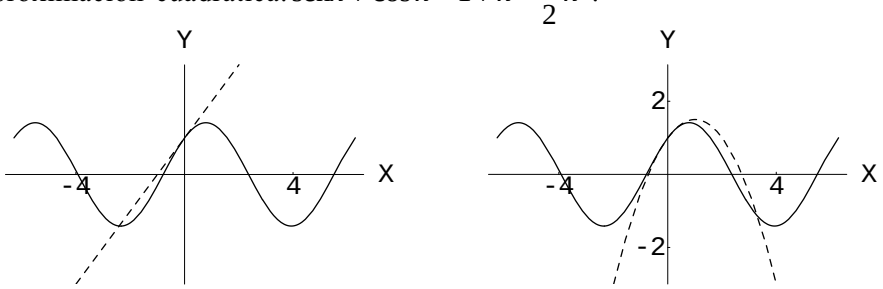

FIGURA 29: La función $y = \operatorname{sen} x + \cos x$ y sus aproximaciones lineal y cuadrática.

• Aproximación lineal (por exceso): $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$,

aproximación cuadrática: $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2$,

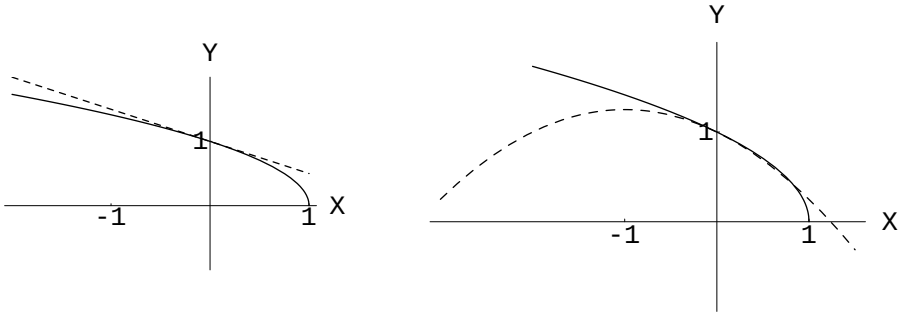

FIGURA 30: La función $y=\sqrt{1+x}$ y sus aproximaciones: lineal y cuadrática.

• Aproximación lineal (por defecto): $\frac{1}{1-x} \approx 1-x$,

aproximación cuadrática: $\frac{1}{1-x} \approx 1-x+x^2$.

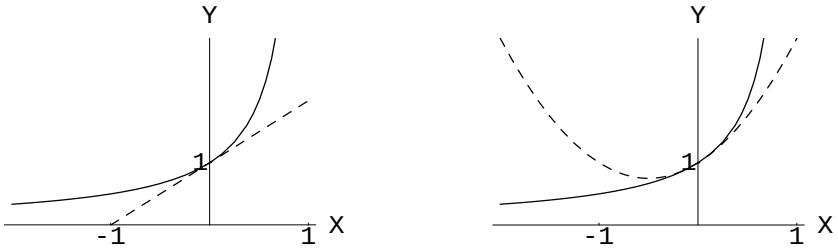

FIGURA 31: La función $y=1/(1-x)$ y sus aproximaciones: lineal y cuadrática.

• Aproximación lineal: $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \approx 1$ y aproximación cuadrática: $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \approx 1-\frac{1}{6}x^2$.

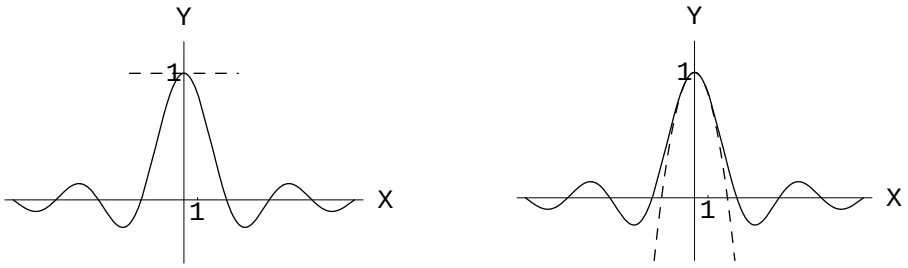

FIGURA 32: La función $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y sus aproximaciones: lineal y cuadrática.

7.4. La regla de L'Hôpital.

El límite de un cociente de dos funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ es en algunas ocasiones de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, conocidas como indeterminaciones del cociente. Lo que sucede es que el resultado del límite no se puede anticipar porque no es siempre el mismo y depende de la naturaleza de las funciones que intervienen.

La regla de L'Hôpital, objeto de estudio de esta sección, es un método que, en muchos casos, permite determinar el valor del límite de un cociente de funciones, que se basa en la relación que existe entre un cociente de funciones y el cociente de sus derivadas. Esa relación queda explícita en el Teorema del valor medio de Cauchy (el de Lagrange ejerció su influencia en las secciones anteriores).

Es, pues, lógico que comencemos estudiando el Teorema del valor medio de Cauchy, que contiene como caso particular al de Lagrange, dejando para después el enunciado y el uso de la regla de L'Hôpital, que en él se basa.

Teorema del valor medio de Cauchy. La regla de L'Hôpital

El Teorema del valor medio (de Lagrange), que trata con una función, se puede extender al caso de dos funciones. Esta ampliación se conoce como Teorema del valor medio generalizado o Teorema del valor medio de Cauchy, que dice:

Teorema del valor medio de Cauchy: Cuando las funciones f y g son continuas en el intervalo $[a,b]$, cerrado y acotado, y derivables en el interior, entonces

$$f'(c)\cdot[g(b)-g(a)]=g'(c)\cdot[f(b)-f(a)],$$

siendo c un punto entre a y b, $c\in(a,b)$.

Si, además, la derivada de la función g no se anula en el intervalo (a,b), entonces la conclusión del teorema admite la expresión equivalente:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demostración: Para llegar al resultado expuesto, construimos la nueva función $F(x)=[f(b)-f(a)]\cdot g(x)-[g(b)-g(a)]\cdot f(x)$, a la cual se le aplica el

Teorema del valor medio en el intervalo $[a,b]$, y así concluir que $F'(c)=0$, que es precisamente la igualdad del teorema.

Ahora planteamos la siguiente pregunta: ¿Qué sucede con el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienden a 0? El problema es calcular el límite de $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Ya nos hemos encontrado con este problema: la derivada de una función es el límite de $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, donde numerador y denominador tienden a 0:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{0}{0}, \text{ ahora bien } \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a).$$

La idea de la regla de L'Hôpital es ampliar el resultado anterior y utilizar el cociente de las derivadas $\frac{f'}{g'}$ para conseguir el límite del cociente de las funciones $\frac{f}{g}$.

Regla de L'Hôpital I: Consideramos el caso: $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=0$; es decir, el límite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ es indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$. Si el límite del cociente de derivadas es L: $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, entonces el límite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ también es igual a L. Como resumen,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración: Esta primera regla trata el caso de $\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{0}{0}$, que, aplicado a la conclusión $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ del Teorema del valor medio generalizado, resulta:

$$\frac{f(b)}{g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Cuando $b \to a$, también $c \to a$ (pues c está entre a y b). Luego,

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

que es la regla de L'Hôpital.

Ejemplo: Calculamos $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$, que es indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$. Como el límite del cociente de las derivadas es $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$, entonces también $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = 0$. Estas frases las resumiremos escribiendo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} \overset{(L'H)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0.$$

En la figura 33 están dibujadas las curvas del numerador y del denominador: $y = 1 - \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x$, junto con sus rectas tangentes (de pendiente 0 y 1, respectivamente) en el punto $x = 0$.

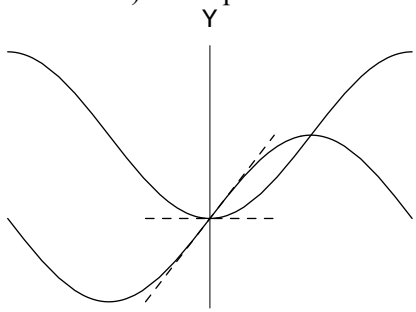

FIGURA 33: Las curvas $y = 1 - \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$ y sus rectas tangentes en $x = 0$.

Regla de L'Hôpital II: Consideramos ahora el caso: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$; es decir, el límite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ es indeterminado de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. De nuevo, si el límite del cociente de derivadas es L: $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, entonces el límite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ es precisamente igual a L. Otra vez se resume en la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observaciones al enunciado

- En la regla de L'Hôpital se ha escrito el límite cuando $x \to a$. Ha de leerse que este símbolo incluye, además del límite en un punto, los limites laterales y los límites en el infinito.
- El símbolo L, que designa el resultado del límite del cociente de derivadas, puede ser un número real o $-\infty$ o $+\infty$.

Cálculo de límites indeterminados mediante la regla de L'Hôpital.

Cómo usar correctamente la regla de L'Hôpital es el objetivo de los ejemplos que inundan este apartado. Con ellos creemos que cubrimos las diferentes situaciones que se presentan: la aplicación reiterada de la regla, la falsedad de su recíproco, sin olvidarnos de que la regla de L'Hôpital puede que sea incapaz de llegar al valor del límite.

Ejemplos: Calculamos los siguientes límites $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log x}{x-\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x-\tan x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$ y $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}$.

1. El primer límite es indeterminado: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}=\dfrac{0}{0}$. Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} \overset{(L'H)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x\cdot 3x^2}=\frac{1}{3}.$$

2. El nuevo límite también es indeterminado: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log x}{x-\sqrt{x}}=\dfrac{0}{0}$. Usamos otra vez la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-\sqrt{x}} \overset{(L'H)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}}{x\left(2\sqrt{x}-1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-1\right)}=\frac{2}{1}=2.$$

3. Este límite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x-\tan x}=\dfrac{0}{0}$, de nuevo indeterminado, lo calculamos aplicando dos veces la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x-\tan x}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x(1-\cos x)}{-\operatorname{sen}^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{-x^2}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{-2x}=\frac{1}{-2}=-0'5$$

4. Una vez más tenemos un límite indeterminado $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\dfrac{0}{0}$, que de nuevo determinamos aplicando dos veces la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{1}=1.$$

5. Este límite y el siguiente son indeterminados de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\dfrac{\infty}{\infty}$. También podemos calcularlo usando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

6. El cálculo del límite indeterminado $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}=\dfrac{\infty}{\infty}$ es como sigue:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3/\cos^2 3x}{1/\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 3x}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-6\cos x\cdot\operatorname{sen}x}{-6\cos 3x\cdot\operatorname{sen}3x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos 3x(-1)}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\operatorname{sen}x}{3\operatorname{sen}3x}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}.$$

Ya hemos avisado que hemos de estar alerta a la hora de aplicar la regla de L'Hôpital, pues podemos cometer errores como los que mostramos en los siguientes ejemplos.

Para obtener el valor del límite indeterminado $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+3x}=\dfrac{0}{0}$ usando la regla de L'Hôpital, hemos actuado así:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2+3x}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{2x+3}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2},$$

pero lo hemos hecho mal. La segunda vez que hemos aplicado la regla de L'Hôpital hemos cometido el error de no preocuparnos de comprobar si el

límite $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{2x+3}$ era todavía indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. De hecho, el error nos ha llevado a una conclusión errónea, pues límite no es $\frac{1}{2}$ sino 0.

El siguiente razonamiento es incorrecto: para calcular el valor del límite indeterminado $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\text{sen}\frac{1}{x}}{\text{sen}x}=\frac{0}{0}$, aplicamos la regla de L'Hôpital y calculamos $\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\text{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$; ahora bien, este último límite no existe, luego el límite de partida $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\text{sen}\frac{1}{x}}{\text{sen}x}$ tampoco existe.

¿Dónde está el error? Rogamos al lector que se fije en el enunciado de la regla de L'Hôpital y lo coteje con el razonamiento que acabamos de usar. Observará que el caso en que el $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *no exista* no está contemplado en la regla de L'Hôpital y, por tanto, no tiene sentido deducir que tampoco existe $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. De hecho, en nuestro ejemplo el límite sí que existe: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\text{sen}\frac{1}{x}}{\text{sen}x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\text{sen}\frac{1}{x}=0$.

Para terminar esta lista de dificultades en la aplicación de la regla de L'Hôpital, proponemos al lector que calcule $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos x}{x+\text{sen}x}$ de forma directa y que compruebe que, sin embargo, la aplicación de la regla de L'Hôpital no consigue responder al valor del límite $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos x}{x+\text{sen}x}$.

Pasamos ahora a tratar las restantes indeterminaciones del cálculo de límites: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, ∞^0, 0^0 y 1^∞. Se pueden transformar en expresiones equivalentes de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, que son las formas que admiten la aplicación de la regla de L'Hôpital. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos: Calculamos los siguientes límites: $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\text{cotan}x}{x}\right)$, $\lim_{x\to \pi/2}\left(\frac{\pi}{x}-1\right)^{\tan x}$ y $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

1. El límite $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$ es indeterminado de la forma $0\cdot\infty$.
   Escribimos la función, cuyo límite hemos de calcular, en una forma equivalente como cociente de funciones: $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\text{cotan}\frac{\pi x}{2}}$; naturalmente, el límite sigue siendo indeterminado, pero ahora la indeterminación es de la forma $\frac{0}{0}$. Aplicamos la regla de L'Hôpital:
   $$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\text{cotan}\frac{\pi x}{2}}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-1}{\text{sen}^2\,\pi x/2}}=\frac{2}{\pi}.$$

2. Ahora, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\text{cotan}x}{x}\right)$ es indeterminado de la forma $\infty-\infty$.
   Como antes, escribimos la función en forma de cociente: $\frac{1}{x^2}-\frac{\text{cotan}x}{x}=\frac{1-x\cdot\text{cotan}x}{x^2}$. El límite se ha transformado en la indeterminación $\frac{0}{0}$ y lo resolvemos mediante la regla de L'Hôpital:
   $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\text{cotan}x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-x\cdot\text{cotan}x}{x^2}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\text{cotan}x-x\frac{-1}{\text{sen}^2x}}{2x}=$$
   $$=\lim_{x\to 0}\frac{-\text{sen}x\cos x+x}{\text{sen}^2x\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\text{sen}2x+x}{2x^3}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos 2x+1}{6x^2}\overset{(L'H)}{=}$$
   $$\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}2x}{12x}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

3. Los tres últimos límites son las indeterminaciones $\lim_{x\to \pi/2}\left(\frac{\pi}{x}-1\right)^{\tan x}=1^{\infty}$ y $\lim_{x\to 0^+} x^x=0^0$. Para calcular estos tres límites usamos las funciones logarítmica y exponencial, la primera para convertir el límite de una potencia en el límite de un producto, después resolverlo y conseguir el

límite inicial mediante la transformación inversa del logaritmo: la exponencial. Veámoslo:

- $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\dfrac{\pi}{x}-1\right)^{\tan x} = e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}\tan x\cdot\log\left(\frac{\pi}{x}-1\right)}$.

  Calculamos el límite del exponente, que es indeterminado del tipo $\infty\cdot 0$:

  $$\lim_{x\to\pi/2}\tan x\cdot\log\left(\frac{\pi}{x}-1\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\left(\frac{\pi}{x}-2\right)}{\operatorname{cotan}x}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\frac{\pi}{x^2}}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}}=\frac{4/\pi}{1}=\frac{4}{\pi},$$

  de donde se deduce que $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\dfrac{\pi}{x}-1\right)^{\tan x} = e^{4/\pi}$.

- El último límite, también indeterminado, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 0^0$ lo calculamos escribiendo $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\log x}$.

  El límite del exponente es indeterminado de la forma $0\cdot\infty$ y lo determinamos usando la regla de L'Hôpital:

  $$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\log x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{1/x}\overset{(L'H)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0,$$

  y, por tanto, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$.