Tema 8.
Técnicas de integración: cálculo de primitivas

¿Qué vamos a hacer en este tema? y ¿para qué? Son las preguntas clave al comienzo de cualquier exposición, y naturalmente debemos responderlas también en este tema.

¿Qué vamos a hacer? En este tema nos dedicamos a desarrollar técnicas para calcular «antiderivadas». Esta frase significa: suponemos que la función conocida $f(x)$ es la derivada de otra función $F(x)$ desconocida, que pretendemos calcular. Es, pues, el proceso inverso a derivar; de ahí viene la expresión calcular antiderivadas.

No menos importante es saber para qué. Desde luego, no es por el placer de adquirir una habilidad más. El objetivo es usar el cálculo de primitivas en una propiedad muy importante de la integral definida, que estudiaremos en el próximo tema: la regla de Barrow. Quizá el lector la conozca, en otro caso ha de confiar en nuestra palabra y admitir dos cosas: la importancia de la regla de Barrow y la necesidad del cálculo de antiderivadas para poder usarla.

El guión del tema es el siguiente:

1. *Conceptos básicos y métodos generales de integración.*
2. *Integración de funciones racionales.*
3. *Integración de funciones trigonométricas.*

8.1. Conceptos básicos y métodos generales de integración

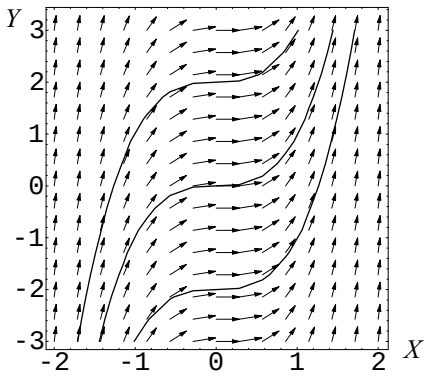
Suponemos que la función $f(x)$ está definida en un intervalo I.

Definición: La función $F(x)$ es una *función primitiva o antiderivada* de $f(x)$ en el intervalo I, si verifica: $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$.

Por ejemplo, si tenemos dada la función $f(x) = 3x^2$, no hay ninguna duda de que la función $F(x) = x^3$ es una primitiva o antiderivada de $f(x) = 3x^2$.

Claro que también $F(x)=x^3+6$ es una primitiva o antiderivada de $f(x)=3x^2$ y, en general, $F(x)=x^3+C$, siendo C cualquier constante, son primitivas de $f(x)=3x^2$. Nos hemos dejado de escribir el intervalo de validez de las primitivas. El descuido se debe a que el intervalo es tan amplio, todo **R**, que ni lo escribimos.

En el siguiente dibujo aparecen las primitivas $y=x^3-2$, $y=x^3$, $y=x^3+2$ de $f(x)=3x^2$, junto con unos vectores. ¿Qué son estos vectores? La respuesta es fácil si se piensa que $f(x)=3x^2$ es la derivada de una función $F(x)$ y por tanto, la gráfica de $F(x)$ debe tener pendiente $3x^2$ en cada punto $(x,F(x))$. Los vectores dibujados son, pues, los vectores tangentes que debe tener una primitiva $F(x)$ que pase por el punto origen del vector.



Es natural preguntarse: ¿qué funciones tienen primitiva?, ¿es posible localizar todas las primitivas de una función? Las respuestas están en las siguientes propiedades.

Respondemos en primer lugar sobre qué tipo de funciones tienen primitiva. De nuevo tenemos que apelar a la buena disposición del lector para creer la propiedad que escribimos a continuación, si bien unas cuantas páginas más adelante tendremos la confirmación de su veracidad.

Propiedad de existencia de primitivas: Si la función f es *continua* en el intervalo I, entonces f tiene función primitiva en I. Es decir, todas las funciones continuas proceden de derivar otras funciones, que son sus primitivas.

El siguiente objetivo es conocer todas las funciones primitivas de una función dada f. La primera parte de la siguiente propiedad es evidente,

mientras que la segunda parte es consecuencia de uno de los teoremas clave del cálculo: el Teorema del valor medio. El enunciado de la propiedad viene enseguida, pero su demostración es un sencillo ejercicio que dejamos propuesto al lector.

Propiedad de las primitivas:

- Si la función f es la derivada de la función F en el intervalo I, entonces f tiene infinitas funciones primitivas en I. Las infinitas funciones primitivas de f son $F(x)+C$, donde C es una constante.
- Supongamos que hemos calculado dos primitivas de f en el intervalo I: $F(x)$ y $G(x)$. Entonces existe alguna constante C tal que $G(x)=F(x)+C$ en I.

En consecuencia, si F es una primitiva de la función f en el intervalo I, entonces el conjunto de todas las primitivas de f en I es el siguiente:

$$\{F(x)+C : F \text{ es una primitiva de } f \text{ en } I,\ c \in \mathbf{R}\}.$$

Este conjunto de primitivas se denomina *integral indefinida* de f y se escribe $\int f(x)dx$. De hecho, la costumbre es escribir: $\int f(x)dx = F(x)+C$. Por ejemplo, $\int 3x^2 dx = x^3 + C$.

Una observación: El cálculo de primitivas de una función $f(x)$ es el primer caso de resolución de ecuaciones diferenciales que afrontamos. Así, la función $y(x)$ primitiva de $f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x)$.

8.2. Una tabla de integrales inmediatas

Cuando se habla de una tabla de integrales inmediatas se entiende que se ha escrito la tabla de derivadas de las funciones elementales invirtiendo el orden de lectura de las igualdades.

Lo habitual es que se disponga de una tabla de primitivas (no sólo las inmediatas), pero ninguna puede pretender anticipar toda primitiva que pueda aparecer en la práctica. A veces se requiere transformar el problema en otro que figure en las tablas. Será a menudo más rápido usar las técnicas que vamos a mencionar en los sucesivos apartados que zambullirse en las páginas de una tabla, aun cuando ésta contenga la respuesta.

La tabla que se incluye a continuación es concisa y una de las muchas posibles.

1. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq 1,$ $\qquad \int f(x)^a f'(x)dx = \dfrac{f(x)^{a+1}}{a+1} + C, \ a \neq 1$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$ $\qquad \displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

3. $\int e^x dx = e^x + C,$ $\qquad \int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + C$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$ $\qquad \int a^{f(x)} f'(x)dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$

5. $\int \text{sen}x dx = -\cos x + C,$ $\qquad \int \text{sen}(f(x)) f'(x)dx = -\cos(f(x)) + C$

6. $\int \cos x dx = \text{sen}x + C,$ $\qquad \int \cos(f(x)) f'(x)dx = \text{sen}(f(x)) + C$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = -\cot\text{an}x + C,$ $\qquad \displaystyle\int \frac{f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)} dx = -\cot\text{an}f(x) + C$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C,$ $\qquad \displaystyle\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \tan f(x) + C$

9. $\int Shx dx = Chx + C,$ $\qquad \int Sh(f(x)) f'(x)dx = Chf(x) + C$

10. $\int Chx dx = Shx + C,$ $\qquad \int Ch(f(x)) f'(x)dx = Shf(x) + C$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C,$ $\qquad \displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} dx = \arctan f(x) + C$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen}\, x + C,$ $\qquad \displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} dx = \text{arcsen}\, f(x) + C$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C,$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}} dx = \ln\left(f(x) + \sqrt{1+(f(x))^2} \right) + C$$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C,$ $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2-1}} dx = \ln\left|f(x) + \sqrt{(f(x))^2-1}\right| + C$

Hallar primitivas no es una tarea automática como lo es calcular derivadas. De hecho, la decisión de la estrategia a seguir para calcular una primitiva no suele obedecer a reglas fijas, y en muchas ocasiones el ensayo-error es la única forma de abordar el problema. Afortunadamente, la disponibilidad de ordenadores nos permite ver las cosas con más optimismo y no es necesario, y no lo haremos, dedicar un esfuerzo extraordinario al estudio de las múltiples técnicas de búsqueda de primitivas.

8.3. Métodos generales de integración

Bajo este título se engloban tres técnicas o propiedades de la integral

indefinida de utilidad general, es decir, aplicables a cualquier cálculo de primitivas. El hecho de que se puedan aplicar no significa que conduzcan al éxito, que en este caso significa llegar al cálculo de una primitiva.

Las tres propiedades o métodos generales de integración son: *Propiedad de linealidad, técnica de integración por partes y propiedad del cambio de variable*.

• *Propiedad de linealidad*

También se conoce con el nombre de método de descomposición. Se trata de aplicar la útil propiedad de linealidad del cálculo de derivadas, $(a.f(x)+b.g(x))'=a.f'(x)+b.g'(x)$, al cálculo de primitivas. Escribamos ya esta propiedad:

$$\int (a.f(x)+b.g(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx,$$

donde las letras a y b designan números reales.

Es claro que la igualdad anterior se puede extender a un número finito de sumandos.

A continuación calculamos algunas integrales indefinidas, que casi son inmediatas, para ver la utilidad de la propiedad de linealidad.

Ejercicios: Calculamos las integrales indefinidas $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}dx$, $\int \left(4-x^{2/3}\right)^3 dx$, $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}dx$ y $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$.

1. Una adecuada escritura del integrando junto a la linealidad nos da la solución de la integral:
$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}dx = \frac{1}{4}\int 4x\left(2x^2+3\right)^{-1/2}dx = \frac{1}{4}2\left(2x^2+3\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C.$$

2. $\int \left(4-x^{2/3}\right)^3 dx$. Una vez desarrollado el binomio al cubo, se aplica la linealidad y se tiene:
$$\int \left(4-x^{2/3}\right)^3 dx = \int \left(64-48x^{2/3}+12x^{4/3}-x^2\right)dx =$$
$$= 64x - \frac{144}{5}x^{5/3} + \frac{36}{7}x^{7/3} - \frac{1}{3}x^3 + C.$$

3. Tras realizar la división, la integral $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}dx$ es inmediata:

$$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}dx = \int \left(x+5-\frac{4}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2}x^2+5x+\frac{4}{x}+C.$$

4. De nuevo una modificación en las constantes nos da una integral inmediata $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+3\right)+C.$

• *Técnica de integración por partes*

Esta técnica se deduce de la regla del producto del cálculo de derivadas, $\left(f(x).g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$, o bien despejando el último sumando del segundo miembro: $f(x).g'(x) = \left(f(x).g(x)\right)' - f'(x)g(x)$.

Integrando en esta última igualdad se deduce:

$$\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx.$$

Poniendo $u = f(x)$ y $v = g(x)$, la fórmula anterior se escribe en la forma que estamos habituados a usar:

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

Los ejemplos de este método de integración son:

Ejercicios: Utilizamos la técnica de integración por partes para calcular $\int \operatorname{arcsen} x dx$, $\int x.\arctan x dx$, $\int xe^{2x}dx$, $\int \left(3x^2-2x-7\right)\cos x dx$.

1. Para resolver esta integral $\int \operatorname{arcsen} x dx$ elegimos $\begin{cases} u = \operatorname{arcsen} x \\ dv = dx \end{cases}$; se deduce que $\begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ v = x \end{cases}$. El método de partes permite, pues, afirmar que:

$$\int \operatorname{arcsen} x dx = x.\operatorname{arcsen} x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = x.\operatorname{arcsen} x + \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= x.\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

2. Para calcular la segunda integral $\int x.\arctan x dx$ elegimos $\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = xdx \end{cases}$, y

por tanto $\begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$.

Así pues,

$$\int x.\arctan x dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C = \frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + C.$$

3. En este ejemplo $\int xe^{2x}dx$, como en el siguiente, conviene elegir el polinomio como factor a derivar. De hecho, usamos $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases}$, de la que se deduce $\begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$.

   La solución es

$$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + C.$$

4. Ya anunciamos que en este ejemplo $\int\left(3x^2-2x-7\right)\cos x dx$ la elección es $\begin{cases} u = 3x^2 - 2x - 7 \\ dv = \cos x dx \end{cases}$, de la que se deduce $\begin{cases} du = (6x-2)dx \\ v = \operatorname{sen} x \end{cases}$. Lo aplicamos al cálculo de la integral y se obtiene:

$$\int\left(3x^2-2x-7\right)\cos x dx = \left(3x^2-2x-7\right)\operatorname{sen} x - \int(6x-2)\operatorname{sen} x dx,$$

   de nuevo nos aparece una integral $\int(6x-2)\operatorname{sen} x dx$ que tiene las mismas características que la de partida. Es, pues, aconsejable continuar aplicando el método de partes con una elección de factores similar al inicialmente realizado. Así pues, elegimos $\begin{cases} u = 6x-2 \\ dv = \operatorname{sen} x dx \end{cases}$, y se deduce $\begin{cases} du = 6dx \\ v = -\cos x \end{cases}$.

   En consecuencia,

$$\int(6x-2)\operatorname{sen} x dx = -(6x-2)\cos x + \int 6\cos x dx = -(6x-2)\cos x + 6\operatorname{sen} x + C.$$

   Finalmente,

$$\int\left(3x^2-2x-7\right)\cos x dx = \left(3x^2-2x-7\right)\operatorname{sen} x + (6x-2)\cos x - 6\operatorname{sen} x + C =$$

$$= \left(3x^2-2x-13\right)\operatorname{sen} x + (6x-2)\cos x + C.$$

• *Propiedad del cambio de variable*

Otra vez aparece en escena una propiedad del cálculo de derivadas: se trata ahora de la regla de la cadena, $\left(F(x(t))\right)' = F'(x(t)).x'(t)$
La idea es: si $\int f(x)dx = F(x) + C$ y cambiamos la variable mediante $x = x(t)$, se tiene

$$\int f(x(t)).x'(t)dx = F(x(t)) + C.$$

En definitiva, este método es útil cuando sabemos calcular una de las dos integrales, o bien $\int f(x)dx$ o bien $\int f(x(t)).x'(t)dt$, y a partir de ella llegar a la obtención de la otra integral. Los ejemplos ayudan a entender esta idea.

Ejercicios: Calculamos usando la técnica del cambio de variable las siguientes integrales indefinidas: $\displaystyle\int \frac{x+1+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}dx$, $\displaystyle\int \frac{e^x - 2e^{2x}}{1-e^x}dx$.

1. La integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x+1+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}dx$ se calcula fácilmente si realizamos el cambio de variable $x = t^2$. La nueva integral es $\displaystyle\int \frac{t^2+1+2\sqrt{t^2}}{t^2-\sqrt{t^2}}2tdt$; vamos a calcular su primitiva en el intervalo $t \in (0, +\infty)$.
   En efecto, tenemos
   $$\int \frac{t^2+1+2\sqrt{t^2}}{t^2-\sqrt{t^2}}2tdt = \int \frac{t^2+1+2t}{t-1}2dt = 2\int\left(t+3+\frac{4}{t-1}\right)dt =$$
   $$= t^2 + 6t + 8\ln|t-1| + C.$$
   Por tanto, $\displaystyle\int \frac{x+1+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}dx = x + 6\sqrt{x} + 8\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + C$.

2. $\displaystyle\int \frac{e^x - 2e^{2x}}{1-e^x}dx$. Cuando nos encontramos, como en este ejemplo, con una función racional de e^x se recomienda hacer el cambio de variable $e^x = t$. Así pues, nos queda la integral $\displaystyle\int \frac{1-2t}{1-t}dt = \int\left(2+\frac{1}{t-1}\right)dt = 2t + \ln|t-1| + C$, que, traducido en términos de la variable original, queda:
   $$\int \frac{e^x - 2e^{2x}}{1-e^x}dx = 2e^x + \ln\left|e^x - 1\right| + C.$$

Problemas propuestos

1. Calcula las siguientes integrales indefinidas: $\int\left(\frac{\sqrt{x}}{x}-3x\sqrt[3]{x}+7\right)dx$, $\int\frac{1}{3x-7}dx$, $\int e^{x^2+4x+5}(x+2)dx$.

2. Comprueba si el resultado de las siguientes integrales es correcto:
$$\int\frac{a^x}{9a^{2x}+4}dx=\frac{\log_a e}{6}\arctan\frac{3a^x}{2}+C,$$
$$\int\frac{1}{Shx+2Chx}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}e^x\right)+C.$$

3. Comprueba si el resultado de las siguientes integrales es correcto: $\int x^3\ln x dx=\frac{1}{16}x^4(4\ln x-1)+C$, $\int x.\text{sen}x dx=-x\cos x+\text{sen}x+C$.

8.4. Integración de funciones racionales

Tanto en esta sección como en la siguiente se tratan métodos más especializados, aplicables a integrales de tipos particulares de funciones. En concreto, nos ocupamos de la integración de funciones racionales por descomposición en fracciones simples en esta sección y de la integración de funciones racionales de trigonométricas en la siguiente.

Pretendemos poner en manos del estudiante los medios necesarios para calcular integrales definidas sencillas. Las más complicadas deben dejarse, sin dudar, a las máquinas de calcular.

Técnica de integración de funciones racionales

Una función racional es un cociente de funciones polinómicas. Escribimos: $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, teniendo en cuenta que los símbolos $P(x)$ y $Q(x)$ significan polinomios en la variable x.

Digamos que el cálculo de $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ es sistemático, es decir, basta seguir

unos pasos que llevan hacia la solución. Ya hemos explicado que nuestra filosofía es conseguir que el estudiante adquiera la habilidad de resolver los casos más sencillos. En consecuencia, vamos a relegar al olvido el caso de las funciones racionales $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ cuyo denominador $Q(x)$ posee raíces complejas múltiples, pues el método de Hermite, que se usa para este caso, trae consigo largos y engorrosos cálculos. Dejemos trabajo a los ordenadores.

Los pasos del método de cálculo de $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ son:

1. ¿Es menor el grado del numerador que el del denominador? Hay dos respuestas posibles.
   Si la respuesta es SÍ, continuar con el paso 2.
   Si la respuesta es NO, efectúese la división. Su resultado es $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, donde $C(x)$ es el polinomio cociente y $R(x)$ es el polinomio resto de la división. El problema de calcular $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ se ha reducido al problema de calcular $\displaystyle\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$. Esta última integral ya verifica que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, así que con ella pasamos a 2.

2. Para uniformar las notaciones suponemos que a este paso se ha llegado con la fracción $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Se descompone en factores simples reales $Q(x)$, el polinomio del denominador.

3. Se descompone la fracción $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones simples. Las fracciones simples que nos pueden aparecer son del tipo:
   $$\frac{1}{x-a}, \qquad \frac{1}{(x-a)^n} \text{ con } n\neq 1 \text{ y } \qquad \frac{Mx+N}{x^2+bx+c} \text{ con } b^2-4c<0.$$

4. Finalmente, la integral $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ es la suma de las primitivas de cada una de las fracciones simples de la descomposición anterior, que son:

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C,$$
$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C, \text{ cuando } n \neq 1,$$
$$\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\,dx = K.\ln\left(x^2+bx+c\right) + L.\arctan(\alpha(x)) + C, \text{ con } b^2-4c<0.$$

Para empezar, los ejemplos de cálculo de primitivas de funciones racionales tienen la característica de que las raíces del denominador $Q(x)$ son sólo reales, simples o múltiples.

Ejercicios: Calculamos las primitivas de las siguientes funciones racionales $\int \frac{1}{x^2-9}\,dx$, $\int \frac{x^2-3x+4}{x^2-2x-8}\,dx$, $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$ y $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$.

1. El resultado es $\int \frac{1}{x^2-9}\,dx = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$. Para conseguirlo seguimos los pasos descritos.
   Primero, observamos que el grado del polinomio del numerador de $\frac{1}{x^2-9}$ es menor que el grado del polinomio del denominador.
   Segundo, factorizamos el denominador: $x^2-9=(x-3)(x+3)$.
   Tercero, descomponemos la fracción en suma de fracciones simples: $\frac{1}{x^2-9} = \frac{1/6}{x-3} + \frac{-1/6}{x+3}$.
   Finalmente,
   $$\int \frac{1}{x^2-9}\,dx = \int \frac{1/6}{x-3}\,dx + \int \frac{-1/6}{x+3}\,dx = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.$$

2. Esta integral $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}\,dx$ precisa para su resolución que, en primer lugar, se efectúe la división y, después, la descomposición en fracciones simples. El resultado es: $\frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} = 1 + \frac{5x+4}{x^2-2x-8} = 1 + \frac{4}{x-4} + \frac{1}{x+2}$.
   Por tanto,
   $$\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}\,dx = \int 1dx + 4\int \frac{1}{x-4}\,dx + \int \frac{1}{x+2}\,dx =$$
   $$= x + 4\ln|x-4| + \ln|x+2| + C.$$

3. Esta integral $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$ es un poquito distinta a las anteriores, pues nos encontramos con un polinomio en el denominador que tiene raíces reales múltiples: $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$.
Seguimos con la descomposición en fracciones simples:
$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{1/2}{x+1}+\frac{-1/2}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}.$$
Ahora la integral ya es sencilla:
$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx+4\int\frac{1}{(x-1)^2}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-4\frac{1}{x-1}+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-4\frac{1}{x-1}+C.$$

4. Esta integral $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx$ tiene la característica de que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, luego primero es necesario realizar la división: $x^4-x^3-x-1=x\left(x^3-x^2\right)+(-x-1)$. El resultado es que se consigue la siguiente descomposición de la fracción:
$$\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}=x+\frac{-x-1}{x^2(x-1)}=x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{-2}{x-1}.$$
En consecuencia, la integral sale:
$$\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx=\int xdx+2\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx-2\int\frac{1}{x-1}dx=$$
$$=\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+C=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C.$$

Resta resolver algunos ejemplos de cálculo de primitivas de funciones racionales cuyo denominador $Q(x)$ tiene raíces reales, simples o múltiples, y raíces complejas simples. Primero, recordemos estas integrales inmediatas:
$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C,\qquad \int\frac{f'(x)}{1+\left(f(x)\right)^2}dx=\arctan f(x)+C.$$

Ejercicios: Resolvemos ahora $\int\frac{1}{x^4-1}dx$, $\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)(x+1)}dx$ y $\int\frac{3x-2}{x^2+x+1}dx$.

1. $\int \frac{1}{x^4-1}dx$. La factorización $x^4-1=(x+1)(x-1)(x^2+1)$ del denominador informa que x^4-1 tiene raíces complejas simples (las incluidas en el factor real simple x^2+1). La descomposición de la fracción $\frac{1}{x^4-1}$ en suma de fracciones simples es $\frac{1}{x^4-1}=\frac{-1/4}{x+1}+\frac{1/4}{x-1}+\frac{-1/2}{x^2+1}$.

Concluimos que las primitivas son:

$$\int \frac{1}{x^4-1}dx=-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

2. $\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)(x+1)}dx$. La factorización del denominador ya está hecha, así que pasamos a escribir la descomposición en fracciones simples de la función integrando:

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)(x+1)}=\frac{1/2}{x+1}+\frac{-x/2+1/2}{x^2+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}.$$

La integral es inmediata:

$$\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)(x+1)}dx=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

3. $\int \frac{3x-2}{x^2+x+1}dx$. La función racional $\frac{3x-2}{x^2+x+1}$ es una fracción simple. Por tanto, pasamos a hacer las transformaciones que nos permitan saber de forma inmediata su primitiva. Consiste en prepararla para ver la derivada de un logaritmo más la derivada de un arco tangente:

$$\frac{3x-2}{x^2+x+1}=\frac{3}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{-2-3/2}{x^2+x+1}=\frac{3}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{7}{2}\frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}=$$

$$=\frac{3}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{7}{\sqrt{3}}\frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.$$

La integral es inmediata:

$$\int \frac{3x-2}{x^2+x+1}dx=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{7}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

8.5. Cálculo de algunas integrales irracionales lineales

Resolvemos ahora algunos tipos de integrales de expresiones algebraicas irracionales que se pueden reducir a integrales de funciones racionales mediante un cambio de variable adecuado.

El problema es calcular una integral, llamada irracional lineal, de la forma

$$I=\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q},\ldots\right)dx,$$

donde R es una función racional. Para convertir I en una integral de una función racional se hace el cambio de variable $\frac{ax+b}{cx+d}=t^M$, donde M es el mínimo común múltiplo de los de denominadores de los exponentes $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, …

Ejercicios: Las integrales indefinidas que calculamos en este ejercicio son $\int\frac{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$, $\int\frac{x^2}{\sqrt{2+x}}dx$ y $\int\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx$.

1. La primera integral se convierte en una integral de función racional al hacer el cambio de variable: $x=t^6$, pues 6 es el mínimo común múltiplo de los índices de las raíces. La derivada del cambio de variable es $dx=6t^5dt$. La nueva integral con la variable t, $t>0$, es $\int\frac{1+t^4+t}{t^6\left(1+t^2\right)}6t^5dt$.

   Una vez simplificada la función racional, realizada la división y efectuada la descomposición en fracciones simples, tenemos:

$$\int\frac{1+t^4+t}{t^6\left(1+t^2\right)}6t^5dt=6\int\left(t+\frac{1}{t}+\frac{-2t+1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=2t^3+6\ln|t|-6\ln\left(t^2+1\right)+6\arctan t+C.$$

   Ahora, usando la función inversa del cambio de variable $t=\sqrt[6]{x}$, concluimos que la integral del enunciado es

$$\int\frac{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx=2\sqrt{x}+\ln x-6\ln\left(\sqrt[3]{x}+1\right)+6\arctan\sqrt[6]{x}+C.$$

2. Para resolver la integral $\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x}}dx$ es recomendable hacer el cambio de variable $2+x=t^2$, cuya derivada es $dx=2tdt$. Resolvemos la nueva integral en la variable t, $t>0$:

$$\int \frac{\left(t^2-2\right)^2}{t}2tdt = 2\int\left(t^4-4t^2+4\right)dt = \frac{2}{5}t^5-\frac{8}{3}t^3+8t+C.$$

Al ser $t=\sqrt{2+x}$ la inversa del cambio de variable, concluimos que

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x}}dx = \frac{2}{5}\sqrt{(2+x)^5}-\frac{8}{3}\sqrt{(2+x)^3}+8\sqrt{2+x}+C=$$

$$=\sqrt{2+x}\left[\frac{2}{5}x^2-\frac{16}{15}x+\frac{46}{15}\right]+C.$$

3. En este último ejemplo $\int \sqrt{\frac{x+1}{x}}dx$ el cambio de variable adecuado es $\frac{x+1}{x}=t^2$, de donde se deduce que $x=\frac{1}{t^2-1}$, que al derivar sale $dx=\frac{-2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt$. Nos queda la nueva integral:

$$\int t\frac{-2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt = \int\left(\frac{-1/2}{t-1}+\frac{-1/2}{(t-1)^2}+\frac{1/2}{t+1}+\frac{-1/2}{(t+1)^2}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{t}{t^2-1}+C.$$

La conclusión es $\int \sqrt{\frac{x+1}{x}}dx = \frac{1}{2}\ln\left|2x+1+2\sqrt{x(x+1)}\right|-\sqrt{x(x+1)}+C.$

Problemas propuestos

1. Comprueba los siguientes resultados:

$$\int \frac{x}{x^2-3x-4}dx = \frac{1}{5}\ln|x+1|+\frac{4}{5}\ln|x-4|+C,$$

$$\int \frac{x^4-1}{x^3-4x^2+x+6}dx = \frac{x^2}{2}+4x-5\ln|x-2|+20\ln|x-3|+C,$$

$$\int \frac{x^4}{(1-x)^3}dx = -\frac{x^2}{2}-3x-6\ln|1-x|-\frac{4}{1-x}+\frac{1}{2(1-x)^2}+C,$$

$$\int \frac{1}{\left(x^2-1\right)^2}dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}+C.$$

2. Comprueba ahora los siguientes resultados:

$$\int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C,$$

$$\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)(x-1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C,$$

$$\int \frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5}\,dx = 5\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln\left(x^2-2x+5\right) + 11\arctan\frac{x-1}{2} + C,$$

$$\int \frac{9x+10}{x^2+x+2}\,dx = \frac{9}{2}\ln\left(x^2+x+2\right) + \frac{11}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C.$$

3. Indicamos las primitivas de algunas funciones irracionales lineales; compruébese que son correctas:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C,$$

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}\,dx = \frac{3}{7}\sqrt[6]{(2x-3)^7} - \frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x-3)^5} + \sqrt{2x-3} - 3\sqrt[6]{2x-3} +$$

$$+ 3\arctan\sqrt[6]{2x-3} + C.$$

8.6. Integración de funciones trigonométricas

Cuando aparece el problema de calcular una primitiva de una función que es una expresión algebraica de $\operatorname{sen}x$ y de $\cos x$, $I = \int R(\operatorname{sen}x, \cos x)dx$, el cambio de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ la transforma en una integral racional.

Veamos un ejemplo. Aplicamos a la integral $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$ el cambio de variable $t = \tan\frac{x}{2}$, del que se deducen las siguientes relaciones: $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{sen}x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$. La nueva integral es:

$$\int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int 1 dt = t + C.$$

Lo cual nos lleva a $\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \tan\frac{x}{2} + C$.

La sustitución $t = \tan\frac{x}{2}$ transforma la integral $I = \int R(\text{sen}x, \cos x) dx$ en una integral de función racional y, por tanto, siempre permite calcular I. Por eso, dicha sustitución se denomina a veces la «sustitución universal». Sin embargo, esta sustitución conduce con frecuencia a funciones racionales demasiado complicadas. Es por esto que necesitamos otras alternativas.

Se recomiendan otro cambios de variable como: $t = \text{sen}x$ o $t = \cos x$ o $t = \tan x$. La utilidad de cada uno de ellos depende de las características de la función integrando. En concreto:

- Para $R(\text{sen}x, \cos x)$ función impar en $\cos x$, el cambio de variable recomendado es $t = \text{sen}x$.
- Para $R(\text{sen}x, \cos x)$ función impar en $\text{sen}x$, el cambio de variable recomendado es $t = \cos x$.
- Para $R(\text{sen}x, \cos x)$ función par en $\text{sen}x$ y $\cos x$, el cambio de variable recomendado es $t = \tan x$.

Veamos algunos ejemplos

Ejercicios: Ahora calculamos $\int \frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{\text{sen}x} dx$, $\int \frac{1}{\text{sen}x} dx$, $\int \text{sen}^3 x dx$, $\int \frac{1}{2+3\tan x} dx$ y $\int \frac{\text{sen}x}{\text{sen}x + \cos x} dx$.

1. La función de esta integral $\int \frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{\text{sen}x} dx$ es impar en $\cos x$: $\frac{4(-\cos x)^3 - 3(-\cos x)}{\text{sen}x} = -\frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{\text{sen}x}$. Así que nos proponemos resolverla usando el cambio de variable $t = \text{sen}x$. De este cambio de variable se deducen las siguientes relaciones: $\cos^2 x = 1 - t^2$ y $dt = \cos x dx$. La sustitución propuesta transforma la integral en el cálculo de una primitiva de una función racional:
$$\int \frac{4(1-t^2)-3}{t} dt = \int \left(\frac{1}{t} - 4t\right) dt = \ln|t| - 2t^2 + C.$$

En consecuencia, $\displaystyle\int \frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{\text{sen}x}\,dx = \ln|\text{sen}x| - 2\text{sen}^2 x + C$.

2. Ahora la función de la integral $\displaystyle\int \frac{1}{\text{sen}x}\,dx$ es impar en $\text{sen}x$, esto es, $\dfrac{1}{\text{-sen}x} = -\dfrac{1}{\text{sen}x}$. Aplicamos, pues, el cambio de variable recomendado $t = \cos x$, para el cual se deducen las relaciones: $\text{sen}^2 x = 1 - t^2$ y $dt = -\text{sen}x dx$.
Así, se consigue la integral racional:
$$\int \frac{1}{1-t^2}(-dt) = \int \left(\frac{-1/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1} \right) dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$
De donde se llega: $\displaystyle\int \frac{1}{\text{sen}x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$.

3. Es obvio que la función integrando de $\int \text{sen}^3 x dx$ es una función impar en $\text{sen}x$. El cambio de variable $t = \cos x$ y las relaciones que de él se deducen: $\text{sen}^2 x = 1 - t^2$ y $dt = -\text{sen}x dx$, transforman la integral en
$$\int (1-t^2)(-dt) = \int \left(t^2 - 1\right) dt = \frac{1}{3}t^3 - t + C.$$
De donde $\int \text{sen}^3 x dx = \dfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$.

4. $\displaystyle\int \frac{1}{2+3\tan x}\,dx$. Como la función $\dfrac{1}{2+3\tan x}$ depende de $\tan x$, decidimos aplicar el cambio de variable $t = \tan x$, de donde $dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt$. La nueva integral es $\displaystyle\int \frac{1}{(2+3t)(1+t^2)}\,dt$, una integral racional que sabemos calcular:
$$\int \frac{1}{(2+3t)(1+t^2)}\,dt = \int \left(\frac{9/13}{3t+2} + \frac{1}{13}\frac{-3t+2}{t^2+1} \right) dt =$$
$$= \frac{3}{13}\ln|3t+2| - \frac{3}{26}\ln\left(t^2+1\right) + \frac{2}{13}\arctan t + C.$$
En consecuencia,
$$\int \frac{1}{2+3\tan x}\,dx = \frac{3}{13}\ln|3\tan x + 2| - \frac{3}{26}\ln\left(\sec^2 x\right) + \frac{2}{13}x + C =$$
$$= \frac{3}{13}\ln|3\text{sen}x + 2\cos x| + \frac{2}{13}x + C.$$

5. A la integral $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx$ le aplicamos el cambio de variable $t = \tan x$, pues el integrando es una función par en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Del cambio de variable propuesto se deduce que $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$. La integral se transforma en

$$\int \frac{t}{t+1} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{t}{(t+1)(t^2+1)} dt = \int \left(\frac{-1/2}{t+1} + \frac{1}{2} \frac{t+1}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{4} \ln(t^2+1) + \frac{1}{2} \arctan t + C.$$

La solución es

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx = -\frac{1}{2} \ln|\tan x + 1| + \frac{1}{4} \ln(\sec^2 x) + \frac{1}{2} x + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|\operatorname{sen} x + \cos x| + \frac{1}{2} x + C.$$

Destacamos, porque aparecen a menudo, las integrales trigonométricas $\int \operatorname{sen}^2 x dx$, $\int \cos^2 x dx$. Conviene, pues, saber calcularlas. Para ello, usamos las fórmulas de la trigonometría: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ y $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Así pues, $\int \operatorname{sen}^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C$.

Del mismo modo, $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C$.

Este mismo procedimiento se suele utilizar para integrales de funciones $\operatorname{sen}^{2m} x . \cos^{2n} x$ (los exponentes son números pares), pues el uso, a veces reiterado, de las fórmulas $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ y $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ conduce siempre a integrales inmediatas.

Todos los métodos de integración de funciones algebraicas de las trigonométricas que hemos ido usando son métodos utilizables para funciones algebraicas de las hiperbólicas. Únicamente hay que tener el cuidado de adaptarse a las propiedades de las funciones hiperbólicas. Resolvemos como ejemplo $\int Ch^2 x dx$, $\int Ch^3 x dx$.

En el caso de $\int Ch^2 x dx$ usamos la fórmula de transformación a argumentos

dobles: $Ch^2x = \dfrac{Ch2x+1}{2}$, de donde se deduce fácilmente el resultado:

$$\int Ch^2 x dx = \int \frac{Ch2x+1}{2} dx = \frac{1}{4} Sh2x + \frac{1}{2} x + C.$$

Para $\int Ch^3 x dx$ es aconsejable realizar el cambio de variable $t = Shx$, para el cual se deduce $Ch^2 x = 1 + t^2$ y $dt = Chxdx$. La integral se transforma en $\int (1+t^2) dt$, se resuelve $\int (1+t^2) dt = t + \frac{1}{3} t^3 + C$, y así tenemos la solución:

$$\int Ch^3 x dx = Shx + \frac{1}{3} Sh^3 x + C.$$

8.7. Cálculo de algunas integrales irracionales cuadráticas

Sólo vamos a ocuparnos de averiguar las primitivas de las funciones irracionales cuadráticas: $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$ y $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$.

Los dos tipos de integrales se resuelven usando los cambios de variable que pronto expondremos, si bien la segunda de ellas es casi una integral inmediata, lo cual significa que se puede calcular sin hacer uso de ningún cambio de variable.

Empezamos dedicando nuestros esfuerzos a calcular la integral $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$. Un ejemplo sencillo es $\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{x}{4} + C$, resultado que se ha deducido por comparación con la integral inmediata: $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} dx = \operatorname{arcsen} f(x) + C$.

Si además de la anterior integral $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} dx = \operatorname{arcsen} f(x) + C$ leemos en la tabla de integrales inmediatas estas dos:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}} dx = \ln\left(f(x) + \sqrt{1+(f(x))^2} \right) + C,$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2-1}} dx = \ln\left| f(x) + \sqrt{(f(x))^2-1} \right| + C,$$

entonces son inmediatas también las siguientes integrales:

- $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(2x+3)+C,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-1}\right|+C,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x+5)^2+4}}\,dx = \ln\left(\frac{x+5}{2}+\frac{\sqrt{(x+5)^2+4}}{2}\right)+C.$

Al observar esta lista de integrales inmediatas podemos afirmar que ya sabemos calcular las integrales $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, sea cual sea el polinomio cuadrático. Para convencer al lector de que es así, en el siguiente ejercicio resolvemos unos ejemplos. Claro está que requieren como paso previo buscar la adecuada expresión del polinomio cuadrático.

Ejercicios: Calculamos $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+x+1}}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$.

En ambos ejemplos es necesario que el polinomio cuadrático se exprese en la forma de suma o diferencia de cuadrados y así usar las integrales inmediatas que acabamos de recordar.

1. En este ejemplo $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+x+1}}\,dx$, el polinomio $-2x^2+x+1$ se escribe como una diferencia de cuadrados:
$$-2x^2+x+1=\frac{9}{8}-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}\left[9-(4x-1)^2\right],$$
que, aplicado a la integral, nos permite calcularla de forma inmediata:
$$\int \frac{1}{\sqrt{-2x^2+x+1}}\,dx=\int \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9-(4x-1)^2}}\,dx=\frac{\sqrt{8}}{4}\operatorname{arcsen}\frac{4x-1}{3}+C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$. Ahora el polinomio cuadrático se escribe como: $x^2-2x+5=(x-1)^2+4$, luego la integral es inmediata:
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+4}}\,dx=\ln\left(\frac{x-1}{2}+\frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{2}\right)+C.$$

Volvemos ahora nuestra mirada hacia las integrales $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$. Pongamos un ejemplo para ilustrar la idea de los cambios de variable que vamos a recomendar. El ejemplo es la integral $\int\sqrt{16-x^2}\,dx$, donde la función $y=\sqrt{16-x^2}$ representa la mitad superior de la circunferencia $x^2+y^2=16$. Por cierto, que el movimiento circular cuya trayectoria es esta circunferencia admite ser descrito mediante $x(t)=4\cos t$ e $y(t)=4\text{sen}t$, entre otras posibilidades suficientemente conocidas por el lector. La propuesta es que, para resolver la integral, realicemos, por ejemplo, el cambio de variable $x(t)=4\cos t$. Aplicamos, pues, este cambio de variable a la integral $\int\sqrt{16-x^2}\,dx$:

$$\int\sqrt{16-16\cos^2 t}\,(-4\text{sen}t)dt=-16\int|\text{sen}t|\text{sen}t\,dt=-16\int\text{sen}^2 t\,dt=$$

$$=-16\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt=-8t+4\text{sen}2t+C.$$

La solución es:

$$\int\sqrt{16-x^2}\,dx=-8\arccos\frac{x}{4}+4\cdot 2\frac{x}{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}+C=-8\arccos\frac{x}{4}+\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}+C.$$

Dos ejemplos más: $\int\sqrt{x^2-4}\,dx$ e $\int\sqrt{y^2+4}\,dy$. En esta ocasión las funciones integrando son el resultado de despejar la variable $y(x)$ o la variable $x(y)$ de la hipérbola $x^2-y^2=4$. Esta hipérbola es la trayectoria del movimiento $\begin{cases}x(t)=2Cht\\ y(t)=2Sht\end{cases}$ (nótese que $x^2(t)-y^2(t)=4Ch^2t-4Sh^2t=4$). No es extraño, pues, que se recomienden los cambios de variable $x(t)=2Cht$ para la primera integral e $y(t)=2Sht$ para la segunda.

La primera integral $\int\sqrt{x^2-4}\,dx$ se transforma en $\int\sqrt{4Ch^2t-4}\cdot 2Shtdt$ y sus primitivas son:

$$\int\sqrt{4Ch^2t-4}\cdot 2Shtdt=4\int|Sht|Shtdt=4\int Sh^2tdt=4\int\frac{Ch2t-1}{2}dt=Sh2t-2t+C.$$

En consecuencia,

$$\int\sqrt{x^2-4}\,dx=x\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}-2\ln\left|\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right|+C=\frac{x\sqrt{x^2-4}}{2}-2\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right|+C$$

Análogamente, la segunda integral $\int\sqrt{y^2+4}dy$ se transforma, con el cambio de variable $y(t)=2Sht$, en $\int\sqrt{4Sh^2t+4}\cdot 2Chtdt$ y sus primitivas son:

$$\int\sqrt{4Sh^2t+4}\cdot 2Chtdt = 4\int|Cht|Chtdt = 4\int Ch^2tdt = 4\int\frac{Ch2t+1}{2}dt = Sh2t+2t+C.$$

En consecuencia,

$$\int\sqrt{y^2+4}dy = y\sqrt{\frac{y^2}{4}+1}+2\ln\left|\frac{y}{2}+\frac{\sqrt{y^2+4}}{2}\right|+C = \frac{y\sqrt{y^2+4}}{2}+2\ln\left|\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}\right|+C.$$

En resumen, para resolver integrales de la forma $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ se recomienda utilizar cambios de variable trigonométricos e hiperbólicos. Completamos los ejemplos con el siguiente ejercicio.

Ejercicio: Calculamos $\int\sqrt{-x^2+2x+1}\,dx$, pero, antes de realizar un cambio de variable en la integral, expresamos el polinomio cuadrático en forma de suma o diferencia de cuadrados: $-x^2+2x+1=2-(x-1)^2$.

Ahora ya podemos decidir que el cambio de variable sea $x-1=\sqrt{2}\cos t$. De acuerdo con él, la transformada de la integral $\int\sqrt{-x^2+2x+1}\,dx$ es $\int\sqrt{2-2\cos^2 t}\left(-\sqrt{2}\text{sen}t\right)dt$, que resolvemos:

$$-2\int|\text{sen}t|\text{sen}tdt = -2\int\text{sen}^2tdt = -2\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt = -t+\frac{1}{2}\text{sen}2t+C,$$

así pues,

$$\int\sqrt{-x^2+2x+1}\,dx = -\arccos\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\frac{x-1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{(x-1)^2}{2}}+C =$$

$$= -\arccos\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\frac{x-1}{2}\sqrt{-x^2+2x+1}+C.$$

Problemas propuestos

1. Dejamos esta lista de integrales indefinidas. Compruébense los resultados.

$$\int\frac{1}{1+\text{sen}x+\cos x}dx = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C,$$

$$\int\frac{\text{sen}^3x}{2+\cos x}dx = \frac{1}{2}\cos^2 x-2\cos x+3\ln(2+\cos x)+C,$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+4\cos^2 x}\,dx = -\frac{1}{2}\arctan(2\cos x)+C,$$

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}+C,$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx = -\frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x}+\frac{1}{\operatorname{sen} x}+C,$$

$$\int \frac{2\tan x+3}{\operatorname{sen}^2 x+2\cos^2 x}\,dx = \ln\left(\tan^2 x+2\right)+\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x\,\cos^3 x}}\,dx = 2\sqrt{\tan x}+C,$$

$$\int \cos^4 x.\operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\operatorname{sen}4x+\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x+C,$$

$$\int Sh^2 x.Ch^2 x\,dx = \frac{1}{32}Sh4x-\frac{1}{8}x+C.$$

2. Más integrales indefinidas. Compruébese si las primitivas son correctas.

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-1}}\,dx = \ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-1}\right|+C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x+5)^2+4}}\,dx = \ln\left(\frac{x+5}{2}+\frac{\sqrt{(x+5)^2+4}}{2}\right)+C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-4x-35}}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-1}{6}+\frac{\sqrt{4x^2-4x-35}}{6}\right|+C,$$

$$\int \sqrt{4x^2-4x-35}\,dx = \frac{2x-1}{4}\sqrt{4x^2-4x-35}-$$

$$-9\ln\left|\frac{2x-1}{6}+\frac{\sqrt{4x^2-4x-35}}{6}\right|+C,$$

$$\int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx = 5\sqrt{x^2+2x+5}-\ln\left(\frac{x+1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{2}\right)+C.$$

Una observación: El problema de calcular primitivas tiene la característica importante de que algunas funciones elementales *no tienen primitiva elemental* (por ejemplo, $e^{-x^2/2}$, $\cos t^2, \sqrt{4\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t}$). Este hecho de apariencia incómoda trae como consecuencia la construcción de nuevas funciones elementales de gran interés en Probabilidad y Estadística, Óptica, Mecánica, etc.