

Tema 9. La integral simple de Riemann

En este tema se estudia el concepto de integral de una función de una variable, la integral simple.

La integral se utiliza, entre otras cosas, para calcular áreas. Este problema fácil de visualizar es el que elegimos para ilustrar el proceso de construcción de la integral.

Para completar este comentario, observemos que todos conocemos cómo la geometría elemental nos da herramientas suficientes para obtener el área de una porción de plano limitada por segmentos rectilíneos, es decir, el área de un polígono. Ahora bien, si uno o varios de los segmentos que limitan una porción de plano son curvilíneos, el proceso toma otro cariz y su resolución requiere el concepto de integral que vamos a estudiar.

No obstante, el concepto de integral definida supera al de área que le dio origen, ya que hay funciones integrables lo suficientemente discontinuas para hacernos desistir de imaginar que su gráfica determina un área.

Históricamente, el concepto de integral ha ido sufriendo sucesivas modificaciones: Cauchy dio una formulación rigurosa de la integral de una función continua; Riemann extendió el concepto de integral de Cauchy y amplió el campo de funciones integrables; Stieljes generalizó el concepto de integral de Riemann; y, a comienzos del siglo XX, Lebesgue dio un enfoque totalmente nuevo de integral.

Hemos optado por el estudio del concepto de integral según Riemann, ya que es un concepto de integral básico y, a pesar de sus limitaciones, tiene plena vigencia, pues atiende la mayoría de los requerimientos de las aplicaciones.

9.1. Integral definida de Riemann

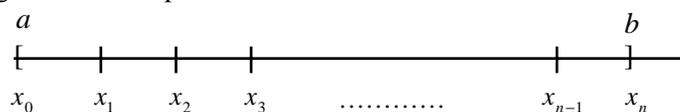
En el tema anterior hemos trabajado y calculado integrales indefinidas $\int f(x)dx$ y ahora vamos a estudiar el concepto de integral definida $\int_a^b f(x)dx$. Queremos que el lector tenga presente desde ahora la gran diferencia entre $\int f(x)dx$ y $\int_a^b f(x)dx$; la integral indefinida $\int f(x)dx$ es un conjunto de funciones, las primitivas de $f(x)$, mientras que la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es un número real, como vamos a ver enseguida.

La integral definida de una función según Riemann

En esta sección exigimos que las funciones $f(x)$ cuya integral vamos a definir sean *acotadas* en el intervalo de integración $[a, b]$, intervalo que es *cerrado y acotado*.

- *Construcción del número real $\int_a^b f(x)dx$*

Primero. Partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud. La imagen gráfica nos explica con claridad la idea.



Realmente, una *partición* como la dibujada queda perfectamente conocida diciendo la sucesión de puntos que delimitan cada uno de los subintervalos. Lo habitual es, pues, decir que una partición del intervalo $[a, b]$ es el conjunto de puntos: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Hay un dato importante relacionado con una partición. Se trata de la longitud de cada una de las partes de la división. El haberlas elegido todas de igual longitud permite escribir que esta longitud común, llamada *amplitud o diámetro de la partición*, es $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Segundo. Sumas de Riemann asociadas a una partición del intervalo $[a, b]$. De nuevo acudimos a una imagen gráfica que nos ayude a entender las sumas de Riemann. La función que se dibuja tiene la característica de ser positiva; ahora bien, la positividad de la función no es una imposición del concepto de las sumas de Riemann, es sólo que así la gráfica tiene una interpretación de área.

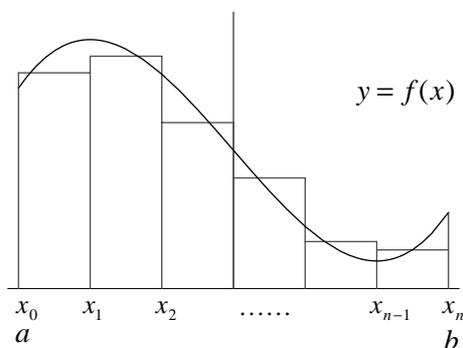


FIGURA 1: Una suma de Riemann.

Describimos lo dibujado. En cada subintervalo de la partición de $[a, b]$ se elige un punto, cuya imagen es la altura de cada uno de los rectángulos del dibujo, para luego calcular el área del rectángulo o, en general, un sumando de la suma de Riemann. Lo ponemos en forma de tabla:

Subintervalo	Punto elegido	Sumando
$[x_0, x_1]$	x_1^*	$f(x_1^*) \cdot (x_1 - x_0) = f(x_1^*) \cdot \Delta x$
$[x_1, x_2]$	x_2^*	$f(x_2^*) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2^*) \cdot \Delta x$
.....
$[x_{n-1}, x_n]$	x_n^*	$f(x_n^*) \cdot (x_n - x_{n-1}) = f(x_n^*) \cdot \Delta x$

Una suma de Riemann asociada a la partición elegida es

$$R_n = f(x_1^*) \cdot \Delta x + f(x_2^*) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n^*) \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x,$$

que mide la suma de las áreas de los rectángulos dibujados en la gráfica, gracias a que en ese ejemplo la función f es positiva en el intervalo $[a, b]$.

Merece ser destacado que cada partición del intervalo $[a, b]$ tiene asociadas infinitud de sumas de Riemann, debido a la libertad de elección de los puntos $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$.

Tercero y último. Definimos la *integral, según Riemann, de la función f en el intervalo $[a, b]$* como $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$, si existe. Escribimos:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x.$$

Es necesario comentar que $\Delta x \rightarrow 0$ es equivalente a $n \rightarrow \infty$.

Siempre conviene detenerse a entender y también memorizar las definiciones. Uno de los frutos de esa meditación es comprender que la igualdad

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$$

dice que una suma discreta $\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$, cuando

pasa al «continuo» ($\Delta x \rightarrow 0$), se convierte en una integral, es decir, tenemos integrales en lugar de sumas. Esta observación es la clave que permite abrir nuestra mente al mundo de las aplicaciones de la integral, muchas de ellas bien diferentes del cálculo de áreas.

Para ayudar a la comprensión y memorización de la idea de integral definida de Riemann incluimos los dos ejemplos siguientes:

Ejemplos: Vamos a construir los números reales $\int_{-3}^1 (x+3)dx$, $\int_0^2 x^2 dx$.

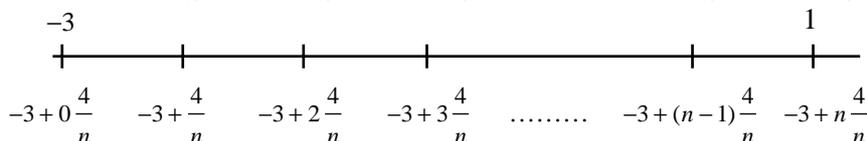
1. La integral definida $\int_{-3}^1 (x+3)dx$.

La partición del intervalo de integración $[-3,1]$ en n partes iguales tiene las siguientes características:

— el diámetro de la partición es $\Delta x = \frac{1-(-3)}{n} = \frac{4}{n}$,

— los puntos de la partición son

$$-3 = -3 + 0 \cdot \frac{4}{n} < -3 + 1 \cdot \frac{4}{n} < -3 + 2 \cdot \frac{4}{n} < \dots < -3 + (n-1) \cdot \frac{4}{n} < -3 + n \cdot \frac{4}{n} = 1,$$



Ahora hemos de conocer las sumas de Riemann R_n asociadas a la partición anterior del intervalo $[-3,1]$.

Antes dibujamos la función:

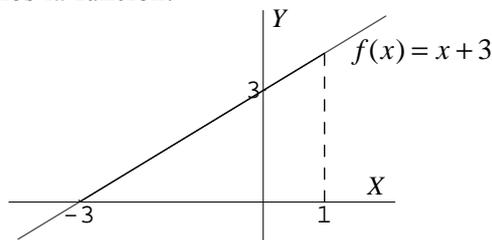


FIGURA 2: Gráfica de la función $y = x + 3$ en $[-3, 1]$

Como la función $f(x) = x + 3$ es creciente y continua, existe la mayor suma de Riemann S_n y la menor suma de Riemann s_n asociadas a la partición del intervalo $[-3, 1]$.

Calculamos a continuación S_n y s_n :

$$S_n = f\left(-3 + 1 \cdot \frac{4}{n}\right) \cdot \frac{4}{n} + f\left(-3 + 2 \cdot \frac{4}{n}\right) \cdot \frac{4}{n} + \dots + f\left(-3 + n \cdot \frac{4}{n}\right) \cdot \frac{4}{n} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(i \cdot \frac{4}{n}\right) \cdot \frac{4}{n} = \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{16}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{16}{n^2} \frac{(1+n)n}{2},$$

$$s_n = f\left(-3 + 0 \cdot \frac{4}{n}\right) \cdot \frac{4}{n} + f\left(-3 + 1 \cdot \frac{4}{n}\right) \cdot \frac{4}{n} + \dots + f\left(-3 + (n-1) \cdot \frac{4}{n}\right) \cdot \frac{4}{n} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left((i-1) \cdot \frac{4}{n}\right) \cdot \frac{4}{n} = \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{16}{n^2} (0 + 1 + 2 + \dots + (n-1)) = \frac{16}{n^2} \frac{(n-1)n}{2}.$$

Es sencillo observar que $s_n \leq R_n \leq S_n$.

Esta relación junto con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^2} \frac{(1+n)n}{2} = 8 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = 8,$$

implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 8$. En definitiva,

$$\int_{-3}^1 (x+3) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 8,$$

que es el área del triángulo de base $b = 1 - (-3) = 4$ y altura $h = 1 + 3 = 4$.

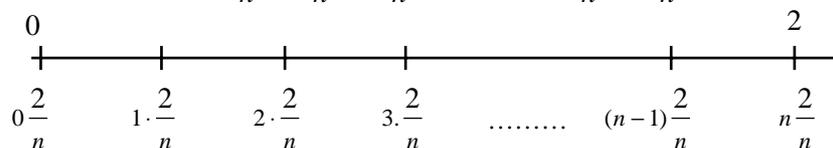
2. Ahora construimos la integral definida $\int_0^2 x^2 dx$.

De nuevo, empezamos con la partición del intervalo de integración $[0, 2]$

en n partes iguales: el diámetro de la partición es $\Delta x = \frac{2}{n}$ y los puntos de

la partición son

$$0 = 0 \cdot \frac{2}{n} < 1 \cdot \frac{2}{n} < 2 \cdot \frac{2}{n} < \dots < (n-1) \cdot \frac{2}{n} < n \cdot \frac{2}{n} = 2,$$



Seguimos con las sumas de Riemann R_n asociadas a la partición anterior del intervalo $[0, 2]$, pero antes la gráfica de la función

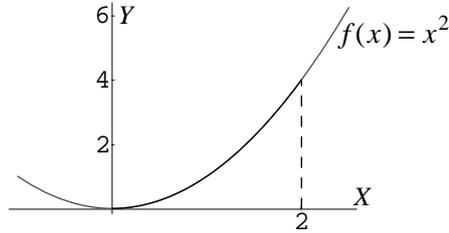


FIGURA 3: Gráfica de la función $y = x^2$ en $[0, 2]$.

Igual que en el ejemplo anterior, la función $f(x) = x^2$ es creciente y continua, luego existe la mayor suma de Riemann S_n y la menor suma de Riemann s_n asociadas a la partición del intervalo $[0, 2]$.

Calculamos a continuación S_n y s_n :

$$\begin{aligned} S_n &= f\left(1 \cdot \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} + f\left(2 \cdot \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} + \dots + f\left(n \cdot \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^n \left(i \cdot \frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n} = \\ &= \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{8}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_n &= f\left(0 \cdot \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} + f\left(1 \cdot \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} + \dots + f\left((n-1) \cdot \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^n \left((i-1) \cdot \frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n} = \\ &= \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{8}{n^3} (0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2). \end{aligned}$$

Necesitamos ahora una fórmula que nos dé el valor de la suma de los cuadrados. Lo hemos consultado y es:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\text{luego, } 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Como $s_n \leq R_n \leq S_n$ y los límites de las sumas mayores y de las sumas menores coinciden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{8}{3} \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{8}{3},$$

se deduce que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{8}{3}$. En definitiva,

$$\int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{8}{3}.$$

Estos dos ejemplos son suficientes para comprender el proceso de construcción de la integral definida y además nos habrán convencido de lo laboriosa y, en general, complicada que es la aplicación de esta técnica.

Necesitamos simplificar nuestro trabajo. Vamos a dar algunos pasos en esa dirección. El objetivo es responder a dos cuestiones: ¿es posible saber si una función f es integrable Riemann observando propiedades sencillas de la función?, ¿hay algún método para calcular el valor de $\int_a^b f(x)dx$ distinto al acabado de usar?

• *Funciones integrables Riemann*

Un ejemplo de *función no integrable Riemann*. La llamada función de Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ no es integrable Riemann en ningún intervalo.

Antes de justificar esa afirmación, debemos convenir que todos los intervalos de números reales contienen números que son racionales y números que no lo son. Es decir, que la función de Dirichlet toma el valor 0 y el valor 1 en cualquier intervalo.

La consecuencia es que la mayor de las sumas de Riemann R_n de esta función de Dirichlet en el intervalo $[a, b]$ es $S_n = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} = b-a$ y desde luego que la menor de estas sumas es $s_n = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x = 0$. Es, pues, evidente que las sumas de Riemann no tienen límite, cuando $n \rightarrow \infty$. Es decir, no existe $\int_a^b f(x)dx$, donde f es la función de Dirichlet.

Damos ahora respuestas positivas. Las tres propiedades que vienen enseguida nos informan de unas clases de funciones que son integrables Riemann: las continuas, las continuas salvo en un número finito de puntos y las monótonas. Las dos primeras son, desde luego, las de mayor utilidad.

Propiedad: *Las funciones continuas son integrables Riemann*, es decir, si f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existe la integral definida $\int_a^b f(x)dx$.

La demostración se puede consultar en cualquiera de los libros que se mencionan en la bibliografía. Avisamos al lector de que en la demostración se utilizan conceptos y propiedades que no se estudian en este curso. Se trata del concepto de función uniformemente continua y de la propiedad de completitud de los números reales.

Propiedad: Las funciones acotadas que sólo tienen un número finito de discontinuidades (de salto) son integrables Riemann, es decir, si f es acotada en el intervalo $[a, b]$ y continua en $[a, b]$ salvo en un número finito de puntos, entonces existe la integral definida $\int_a^b f(x)dx$.

No vamos a escribir la demostración de esta propiedad, pero sí incluimos un ejemplo que ilustra la idea. La famosa función escalón unitario $U(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ es integrable, digamos, en $[-2, 3]$. Calculemos pues $\int_{-2}^3 U(x)dx$.

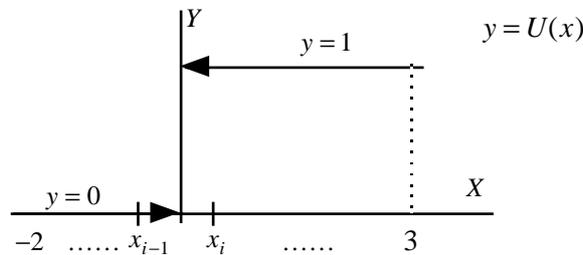


FIGURA 4: Gráfica de la función escalón unitario.

Pensemos de nuevo en las sumas de Riemann. La primera observación se refiere a la partición del intervalo $[-2, 3]$ y dice que la función $U(x)$ es constante, o vale 0 o vale 1, en los subintervalos de la partición salvo en aquel que contenga al punto $x=0$. La conclusión es que las diferentes sumas de Riemann $R_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x$, asociadas a una misma partición, sólo difieren en uno de sus sumandos $f(x_i^*) \cdot \Delta x$. Más aún, si S_n y s_n indican la mayor y la menor de las sumas de Riemann, su diferencia depende sólo del sumando distinto; de hecho: $S_n - s_n = 1 \cdot \Delta x - 0 \cdot \Delta x = \Delta x$.

En definitiva, como $S_n - s_n = \Delta x \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, entonces existe $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x$, que es la integral definida $\int_{-2}^3 U(x)dx$. Su valor es el número real $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0 \cdot (0 - (-2)) + 1 \cdot (3 - 0) = 3$.

Para terminar esta enumeración de las clases de funciones integrables Riemann, indicamos en la siguiente propiedad una más:

Propiedad: Las funciones acotadas y monótonas (crecientes o decrecientes) son integrables Riemann, es decir, si f es acotada en el intervalo $[a, b]$ y creciente o decreciente en $[a, b]$, entonces existe la integral definida $\int_a^b f(x) dx$.

• *Relación entre integral y área*

Propiedad: Supongamos que existe $\int_a^b f(x) dx$.

— Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

— Si $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

La demostración de esta propiedad es muy sencilla. Indicamos sólo la prueba de la primera parte y dejamos que el lector compruebe la segunda por argumentos análogos.

Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces todas las sumas de Riemann son positivas: $R_n = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x \geq 0$. Por tanto, $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n \geq 0$.

La consecuencia de esta propiedad es que, en el caso de $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, el número real positivo $\int_a^b f(x) dx$ es el *área del recinto plano* limitado por arriba por la gráfica de $y = f(x)$, por abajo por el eje X y a derecha e izquierda por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Nótese que el papel de $y = f(x)$ es el de medir las alturas del recinto plano; esto nos permite ampliar la idea geométrica anterior y más adelante usar la integral definida para calcular áreas de recintos diferentes al descrito en las líneas anteriores.

Lo habitual es que utilicemos la integral definida como herramienta para calcular áreas. Ahora bien, también es posible el paso inverso, es decir, calcular algunas integrales con ayuda de las fórmulas del área de ciertas figuras planas (triángulos, círculos, etc.).

Por ejemplo, el número $\int_1^2 (2x+1) dx$ es el área de la figura plana, unión de un rectángulo, de base $b = 2 - 1 = 1$ y altura $h = 3$, y de un triángulo, de base 1 y altura $5 - 3 = 2$. Por tanto, $\int_1^2 (2x+1) dx = 1 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 4$. La gráfica de este ejemplo está en la figura 5.

Análogamente, también es fácil averiguar el valor de $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$. Sólo es necesario darse cuenta de que la función positiva $y = \sqrt{9-x^2}$ en $[-3, 3]$ y el eje X delimitan un semicírculo de radio 3 (véase la figura 5). Así pues,

$\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$ es el área de un semicírculo de radio 3:

$$\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi 3^2 = \frac{9\pi}{2} \approx 14'137.$$

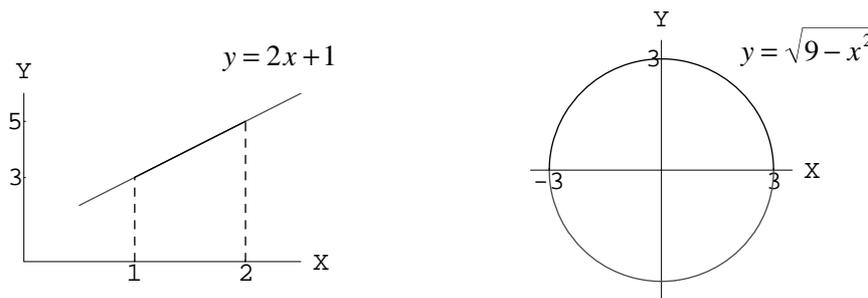


FIGURA 5: Gráfica de los recintos cuya área es $\int_1^2 (2x + 1) dx$ y $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$.

• *Regla de Barrow*

El descubrimiento más importante del Cálculo infinitesimal es la estrecha relación entre integral y derivada. Conocer esta conexión exige que usemos los poderosos instrumentos desarrollados en temas anteriores.

Empezamos con la propiedad más útil para el cálculo de integrales definidas, la famosa regla de Barrow. Su valor reside en la información que da del valor de *la integral de una derivada*. La deducción de la regla de Barrow se apoya en un teorema del cálculo diferencial, el importantísimo Teorema del valor medio (de Lagrange).

Regla de Barrow o la integral de una derivada: Si f es integrable en el intervalo $[a, b]$ y g es una primitiva de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a).$$

La notación que se suele usar es: $\int_a^b f(x) dx = [g(x)]_{x=a}^{x=b} = g(b) - g(a)$.

La demostración empieza con la determinación de una partición del intervalo $[a, b]$ en n partes iguales: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. En

este caso: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Ahora miramos los subintervalos y escribimos:

$$g(x_1) - g(a) = g'(x_1^*) \cdot \Delta x = f(x_1^*) \cdot \Delta x$$

$$g(x_2) - g(x_1) = g'(x_2^*) \cdot \Delta x = f(x_2^*) \cdot \Delta x$$

.....

$$g(b) - g(x_{n-1}) = g'(x_n^*) \cdot \Delta x = f(x_n^*) \cdot \Delta x,$$

donde hemos aplicado el Teorema del valor medio.

La parte izquierda de las igualdades suma $g(b) - g(a)$ y la suma de la derecha es una de las sumas de Riemann de f asociadas a la partición del intervalo $[a, b]$.

Si ahora pasamos al límite, cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $g(b) - g(a) = \int_a^b f(x) dx$.

Ejercicios: Calculamos la integrales $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$, $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2-1} dx$ y $\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx$ mediante la regla de Barrow.

El primer comentario es que las tres integrales existen, pues es fácil observar que las funciones son continuas en los respectivos intervalos de integración.

1. Una primitiva de la función $\frac{1}{1+x^2}$ es $\arctan x$. Luego,

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_1^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \approx 0'262.$$

2. Del mismo modo, la función $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}$ tiene como primitiva a

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \text{ y, en consecuencia,}$$

$$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2-1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right]_{-3}^{-2} = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \approx 0'203.$$

3. La última integral:

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \cos \pi + \frac{1}{2} \cos 0 = 1.$$

Mucho cuidado, no se debe confundir la regla de Barrow con la definición de integral. Insistimos en que la regla de Barrow es sólo un instrumento, ciertamente importante, para el cálculo de algunas integrales definidas.

Conviene que el lector reconozca desde ahora las razones que pueden impedir aplicar la regla de Barrow a una función f cuya expresión analítica está dada. Éstas son las razones:

- Las primitivas de algunas funciones como $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ o $\cos t^2$, entre otras, no son expresables en términos elementales.
- Aunque la primitiva de f sea elemental, encontrarla puede requerir alguna idea feliz, con la que no seamos capaces de dar.
- Calcular la primitiva de f puede ser muy laborioso.

Para estos casos en que la regla de Barrow es imposible o inoperante, se han desarrollado métodos para estimar el valor de la integral a partir de los valores de la función en un número limitado de puntos del intervalo. Estamos hablando de las llamadas *fórmulas de cuadratura* que son una parte de la integración numérica.

Para terminar esta sección, calculamos el área de algunos recintos planos.

Ejercicios:

1. Área del recinto plano limitado por el eje de abscisas y una semionda de la senoide.

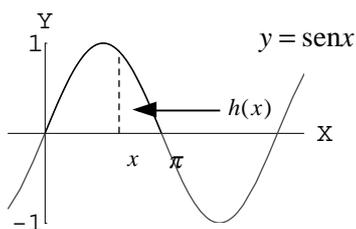


FIGURA 6: Gráfica de la función $y = \text{sen } x$ en $[0, \pi]$.

Las alturas h del recinto vienen dadas por $h(x) = \text{sen } x$, luego el área A del

recinto es $A = \int_0^{\pi} \text{sen } x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2$.

2. Área del recinto plano limitado por las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, y las curvas $y = 2^x$ e $y = 2x - x^2$.

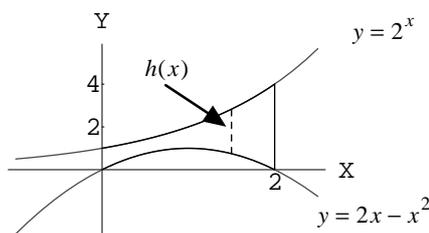


FIGURA 7: Gráfica de la exponencial $y = 2^x$ y de la parábola $y = 2x - x^2$ en $[0, 2]$.

En este caso, las alturas del recinto son $h(x) = 2^x - (2x - x^2)$, de lo que se deduce que el área A del recinto vale:

$$A = \int_0^2 [2^x - (2x - x^2)] dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} - x^2 + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{1}{\ln 2} (4 - 1) - 4 + \frac{1}{3} 8 =$$

$$= \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3} \approx 2'995$$

3. Área de la porción de plano entre las parábolas $x = -2y^2$ y $x = 1 - 3y^2$.

Conviene, por ser más sencillo, que pensemos que las alturas del recinto son los segmentos horizontales $h(y)$.

Así pues, $h(y) = (1 - 3y^2) - (-2y^2) = 1 - y^2$. Por tanto, el área A es

$$A = \int_{-1}^1 (1 - y^2) dy = 2 \int_0^1 (1 - y^2) dy = 2 \left[y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \approx 1'333.$$

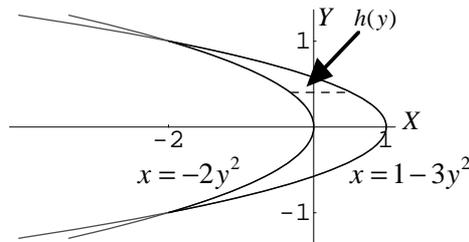


FIGURA 8: Gráfica de las parábolas del ejercicio 3.

9.2. Propiedades de la integral definida de Riemann

En la sección anterior estudiamos la definición de integral $\int_a^b f(x) dx$, pero no podemos detenernos allí. La integral es una herramienta muy útil y necesitamos conocer sus propiedades.

La primera propiedad nos dice que si se suma la integral desde a hasta b a la del intervalo vecino, desde b hasta c , el resultado es la integral desde a hasta c .

1. Propiedad de aditividad del intervalo: Si f es una función integrable en el intervalo $[a, b]$ y en el intervalo $[b, c]$, entonces f es integrable en el intervalo total $[a, c]$. Además,

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$

Esta propiedad es obvia cuando se interpreta como suma de áreas. También se deduce fácilmente a partir de la definición de integral.

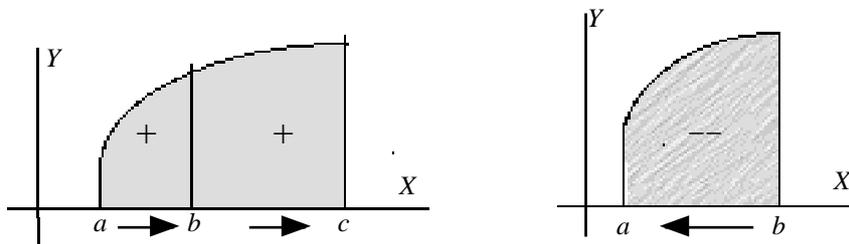


FIGURA 9: Propiedad aditiva del intervalo e intervalo recorrido en sentido inverso.

Sobre el intervalo de integración hay dos convenios:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$. Si la base del recinto es un punto, entonces la integral, como era de esperar, vale 0.
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$. Si el intervalo de integración se recorre en sentido contrario, la integral cambia de signo.

Ejemplos: Aplicamos esta propiedad a $\int_{-1}^2 \frac{|x|}{x} dx$ y a $\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx$.

1. La integral $\int_{-1}^2 \frac{|x|}{x} dx$ existe, pues la función $y = \frac{|x|}{x}$ es acotada (su máximo es 1 y su mínimo -1) y además es continua salvo en el punto $x = 0$. Lo más sensato es calcular la integral mediante la regla de Barrow; ahora bien, la función $y = \frac{|x|}{x}$ no tiene primitiva en el intervalo $[-1, 2]$. Necesitamos dividir el intervalo de integración en dos trozos: $[-1, 0]$ y $[0, 2]$. De este modo, el cálculo es así:

$$\int_{-1}^2 \frac{|x|}{x} dx = \int_{-1}^0 \frac{|x|}{x} dx + \int_0^2 \frac{|x|}{x} dx = \int_{-1}^0 (-1) dx + \int_0^2 1 dx = 1 + 2 = 3.$$

2. Ahora en la integral $\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx$, que también existe, pues la función es continua, usamos la relación $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = |\cos x|$. También es necesario que dividamos el intervalo de integración en dos trozos: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,

$$\text{ya que la función es } |\cos x| = \begin{cases} \cos x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

La integral es:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx &= \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos x) dx = \\ &= [\text{sen}x]_0^{\pi/2} + [-\text{sen}x]_{\pi/2}^{\pi} = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Si se quiere aplicar la regla de Barrow, es necesario buscar primitivas. Esto requiere que usemos las técnicas de cálculo de primitivas que hemos desarrollado en el tema anterior. Las tres técnicas básicas o generales fueron: linealidad, método de partes y cambio de variable. Las propiedades siguientes nos dicen cómo adaptarlas a las integrales definidas.

La propiedad de linealidad que viene a continuación es, sin duda, la más importante.

2. Propiedad de linealidad: Si f y g son funciones integrables en el intervalo $[a, b]$, entonces $\lambda f + \mu g$ es integrable en el intervalo $[a, b]$, siendo λ y μ dos constantes. Además,

$$\int_a^b (\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

La propiedad de integración por partes, junto con el método de cambio de variable, son métodos muy útiles en el cálculo de integrales. Son las dos siguientes propiedades.

3. Propiedad de integración por partes: Si f y g son funciones con derivada integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f \cdot g' = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f' \cdot g.$$

O bien con la escritura $u = f$ y $v = g$: $\int_a^b u \cdot dv = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v \cdot du.$

Por ejemplo, para calcular $\int_0^{\pi} (x \cdot \text{sen}x) dx$, conviene usar la propiedad de integración por partes y llamar $\begin{cases} u = x, \\ dv = \text{sen}x dx \end{cases}$, de donde se deduce $\begin{cases} du = dx, \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Con lo cual $\int_0^{\pi} (x \cdot \text{sen}x) dx = [-x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) dx = \pi + [\text{sen}x]_0^{\pi} = \pi.$

4. Propiedad del cambio de variable: Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y la función del cambio de variable $x = x(t)$ tiene derivada continua en el intervalo $[\alpha, \beta]$, donde $a = x(\alpha)$ y $b = x(\beta)$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t)) \cdot x'(t) dt.$$

Por ejemplo, al calcular $\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2} dx$ con el cambio de variable $x = x(t) = \cos t$ cuya derivada es $dx = -\operatorname{sen} t dt$, comprobamos que se verifican las hipótesis de la propiedad del cambio de variable, pues todas las funciones son continuas, y así:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{\pi/2}^{\pi/3} \operatorname{sen} t (-\operatorname{sen} t) dt = - \int_{\pi/2}^{\pi/3} \operatorname{sen}^2 t dt = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \\ &= \left[\frac{t}{2} \right]_{\pi/3}^{\pi/2} - \left[\frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t \right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{4} \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \approx 0'478 \end{aligned}$$

Por cierto, que acabamos de calcular el área un trozo del círculo de radio 1, como se ve en la gráfica de la figura 10.

Otro ejemplo. En el cálculo de la integral $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ conviene hacer el cambio de variable $x = x(t) = t^2$ cuya derivada es $dx = 2t dt$. Todas las funciones mencionadas son continuas, luego podemos aplicar la propiedad del cambio de variable:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \int_0^{-1} \frac{1}{1+|t|} 2t dt = 2 \int_0^{-1} \frac{t}{1-t} dt = 2 \int_{-1}^0 \left(1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= [2t + 2 \ln|t-1|]_{-1}^0 = 2 - 2 \ln 2 \approx 0'614 \end{aligned}$$

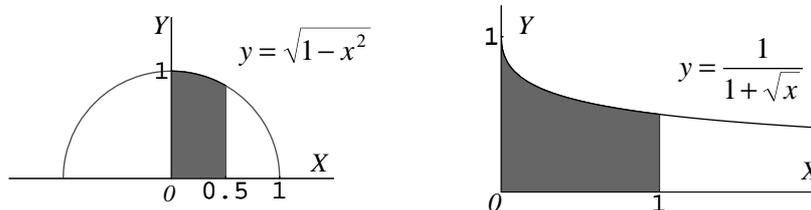


FIGURA 10: Gráficas de los dos ejemplos del cambio de variable.

Finalizamos esta lista de propiedades con la propiedad que permite simplificar el cálculo de integrales cuando la función tiene propiedades de simetría o de periodicidad. El enunciado es el siguiente:

5. Reducción del intervalo de integración por simetría o periodicidad de la función:

— si la función f es par en $[-a, a]$, entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$;

— si la función f es impar en $[-a, a]$, entonces $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$;

— si f es periódica de periodo P , entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+P}^{b+P} f(x)dx$.

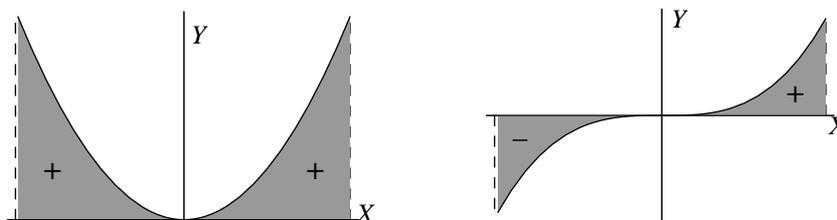


FIGURA 11: La función par suma áreas y la función impar las anula.

Estas propiedades se deducen realizando un cambio de variable.

Así, supongamos que hemos de calcular $\int_{-a}^a f(x)dx$. La aplicación de la propiedad aditiva del intervalo y el cambio de variable $x = -t$ da lugar a:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_a^0 f(-t)(-1)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx.$$

Si f es par en $[-a, a]$, se tiene que $f(-t) = f(t)$. Luego $\int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(t)dt$;

en consecuencia, $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$. Por otro lado, cuando f es impar en

$[-a, a]$, se tiene que $f(-t) = -f(t)$. Así pues, $\int_0^a f(-t)dt = -\int_0^a f(t)dt$ y, por tanto,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Finalmente, en el caso de que f sea periódica de periodo P , la integral

$\int_a^b f(x)dx$ se transforma, usando el cambio de variable $x+P=t$, en

$$\int_{a+P}^{b+P} f(t-P)dt = \int_{a+P}^{b+P} f(t)dt. \text{ Luego } \int_a^b f(x)dx = \int_{a+P}^{b+P} f(t)dt.$$

Ejemplos: Calculamos las integrales $\int_{-1}^1 x^2 dx$, $\int_{-3}^3 xe^{-x^2} dx$ y $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$, aplicando las propiedades de reducción del intervalo de integración antes enunciadas.

1. La función de la primera integral $\int_{-1}^1 x^2 dx$ es par y el intervalo de integración $[-1,1]$ es simétrico. Por tanto, $\int_{-1}^1 x^2 dx = 2\int_0^1 x^2 dx = 2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

2. La siguiente integral $\int_{-3}^3 xe^{-x^2} dx$ tiene las características: el intervalo de integración $[-3,3]$ es simétrico y la función $y = xe^{-x^2}$ es impar. Debido a ellas, la solución es fácil: $\int_{-3}^3 xe^{-x^2} dx = 0$.

3. En el último ejemplo $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$, la función integrando es periódica de periodo π , luego $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx = 100\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$.

La integral $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$, que ha aparecido en el segundo miembro, es casi inmediata. En efecto,

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi} |\operatorname{sen} x| dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx = \sqrt{2} [-\cos x]_0^{\pi} = 2\sqrt{2}.$$

Por tanto, $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx = 200\sqrt{2}$.

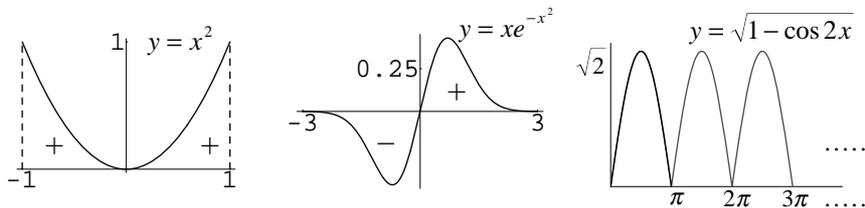


FIGURA 12: Ejemplos de reducción del intervalo de integración.

9.3. Teorema del valor medio para integrales

En la primera propiedad que enunciamos de inmediato intervienen las desigualdades.

La idea geométrica subyacente es que, si una curva ocupa una altura intermedia entre otra dos, el área que hay bajo ella también está entre las áreas que hay bajo las otras dos.

Propiedad de monotonía: *El cálculo de integrales conserva el orden.* Supongamos que f y g son funciones integrables en el intervalo $[a, b]$.

Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

La prueba de esta propiedad la dejamos propuesta al lector. Esperamos que le anime saber que es muy sencilla.

Y ahora viene el enunciado del teorema del valor medio para integrales.

Teorema del valor medio para integrales: Cuando f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, existe un número $c \in [a, b]$ para el cual se cumple:

$$\text{valor medio de la función } f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c).$$

Pensemos en el significado geométrico de esta propiedad. Tracemos un rectángulo de base el intervalo que va desde a hasta b . Levantamos una altura vertical justo hasta que el rectángulo abarque un área igual al área bajo la curva. Entonces el área del rectángulo, que es $(b-a) \cdot f(c)$, coincide con el área bajo la curva $\int_a^b f(x)dx$. El dibujo ayuda a entender esta descripción:

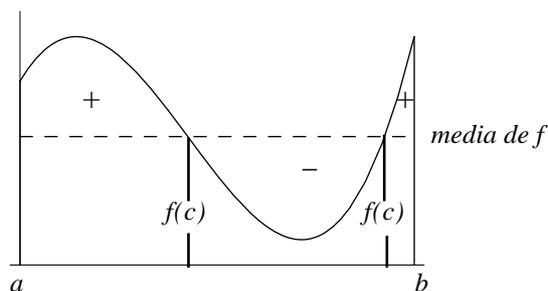


FIGURA 13: El área del rectángulo, $(b-a) \cdot f(c)$, igual al área bajo la curva $\int_a^b f(x)dx$.

Pasamos a la demostración del teorema del valor medio de integrales. Como f es continua en $[a,b]$, f alcanza valor máximo M y valor mínimo m en $[a,b]$. Es decir, $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$.

La integral conserva el orden: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, y, por tanto,
 $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$.

El número $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ está entre el mínimo m y el máximo M de f en el intervalo $[a,b]$. Al ser f continua en $[a,b]$, f alcanza los valores intermedios; así pues, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c).$$

Ejemplos:

1. El valor medio de la función $f(x) = x$ en el intervalo $[-1,1]$ es 0:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0,$$

Además, sabemos que el 0, valor medio de la función, se alcanza en $c = 0$, precisamente el centro del intervalo $[-1,1]$.

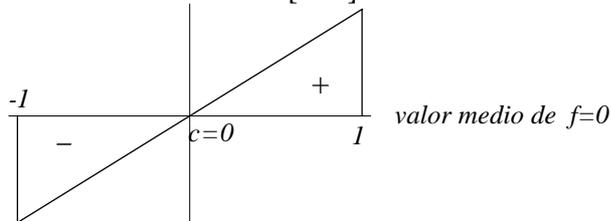


FIGURA 14: Valor medio de la función $f(x) = x$.

2. El valor medio de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-1,1]$ es $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}.$$

Además, sabemos que $\frac{1}{3}$, el valor medio de la función, es la imagen mediante f de $c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y de $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

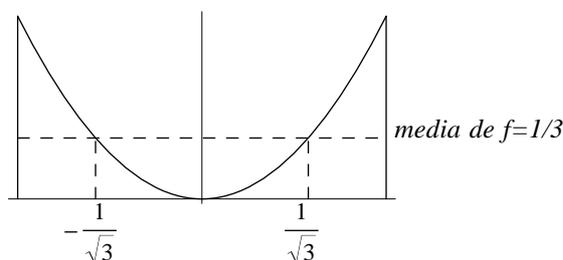


FIGURA 15: Valor medio de la función $f(x) = x^2$.

Ejercicio: Calculamos el área bajo la curva $y = \text{sen}^2 x$, hasta el eje de abscisas, entre $x = 0$ y $x = \pi$. Además obtenemos el valor medio de esta función en el intervalo $[0, \pi]$.

- El área es $\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\text{sen} 2x}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$.
- El valor medio es $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}$. Como la ecuación $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}$ tiene dos soluciones en $[0, \pi]$: $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{3\pi}{4}$, éstos son los valores en los que se alcanza el valor medio de la función $y = \text{sen}^2 x$.

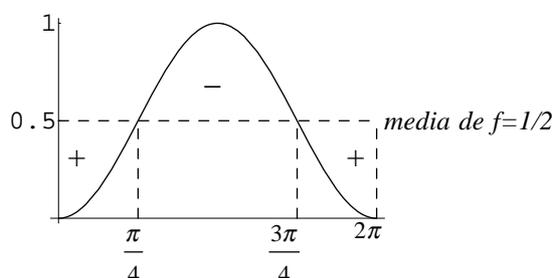


FIGURA 16: Valor medio de la función $y = \text{sen}^2 x$.

Hemos calculado en tres ejemplos el valor medio de una función, desde a hasta b , como la integral dividida por la longitud del intervalo $b - a$. Es una de las más importantes aplicaciones de la integral y proviene de la idea de media aritmética de n números. En efecto, como las integrales surgen de las sumas al pasar al continuo, escribimos:

$$\text{Media de } f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

que viene de: $Media\ de\ n\ números = \frac{1}{n}(f_1 + f_2 + \dots + f_n)$.

Por ejemplo, la media de n números desde $\frac{1}{n}$ hasta $\frac{n}{n}$ es $Media = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n}{n}\right) = \frac{n+1}{2n}$. Cuando $n \rightarrow \infty$, la suma se convierte en una integral y la media aritmética se convierte en la media «continua» de la función $f(x) = x$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ y $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$. En lenguaje coloquial, $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ se lee «el valor medio de los números x entre 0 y 1 es $\frac{1}{2}$ ».

Estas ideas son fundamentales en la Teoría de la Probabilidad (se estudia en la asignatura Métodos Estadísticos de la Ingeniería) y es el Cálculo el que permite acceder al concepto de valor esperado de una variable continua.

9.4. La función integral. Teorema fundamental del Cálculo

Hay que empezar con una función continua f . La integramos desde un punto fijo a hasta una variable x , $\int_a^x f(t) dt = F(x)$. Para cada x , dicha integral $F(x)$ es un número (que no tenemos intención de calcular).

Acabamos de definir una nueva función de x , el extremo superior de integración variable, conocida como *función integral de f* : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

El Teorema fundamental del Cálculo dice que la función integral $F(x)$ tiene derivada y esta derivada es la función original $f(x)$.

Teorema fundamental del Cálculo o la derivada de la integral: Suponemos que f es una función continua.

$$\text{Si } F(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ entonces } \frac{dF}{dx} = f(x).$$

Para demostrar que $\frac{dF}{dx} = f(x)$, empezamos a trabajar con $\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x)$ y así: $\Delta F = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$.

Ahora dividimos por Δx : $\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = \text{valor medio} = f(c)$, c está entre x y $x + \Delta x$ (la posición exacta no se sabe).

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$, c va hacia x . Así que $f(c)$ tiende a $f(x)$, pues f es continua. En consecuencia, $\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x)$.

Acabamos de probar que la derivada de la función integral $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, cuando f es una función continua, es precisamente $f(x)$. Es decir, por fin hemos conseguido confirmar que *las funciones continuas tienen primitiva*, pues una de ellas es $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Ahora pasamos ya a calcular derivadas de integrales con los extremos de integración variables.

Ejemplos: El extremo superior de integración es variable. Calculamos las derivadas de las funciones: $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$, $h(x) = \int_{-1}^x U(t) dt$ y $v(x) = \int_a^{2x} \cos t^2 dt$.

$$1. \quad g(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Como la función $y(t) = \frac{1}{t}$ es continua en $t \in (0, +\infty)$, entonces la función integral $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$ es derivable en $x \in (0, +\infty)$. Además, la derivada es: $g'(x) = y(x) = \frac{1}{x}$.

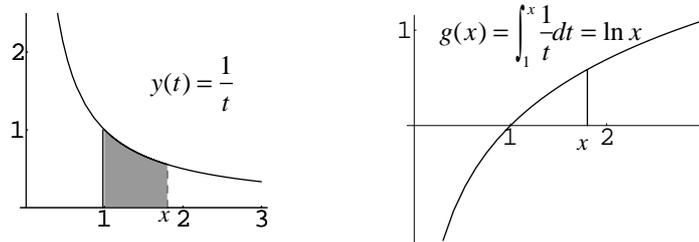


FIGURA 17: Área $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ y función integral $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$.

2. Esta función $h(x) = \int_{-1}^x U(t) dt$ no es derivable en $x=0$. En la gráfica de la función salto unitario se aprecia que no es continua en el 0. También la gráfica de su función integral $h(x)$ muestra que no es derivable en $x=0$.

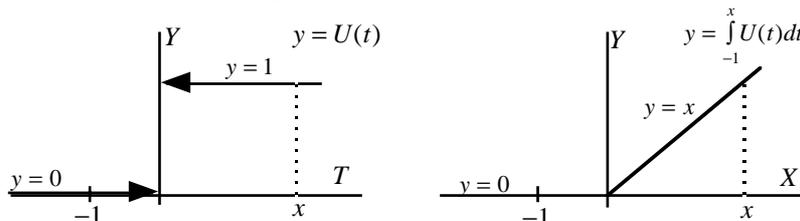


FIGURA 18: Gráfica de las funciones $U(t)$ y $h(x)$.

3. La función $v(x) = \int_a^{2x} \cos t^2 dt$, con extremo superior de integración variable, no puede calcularse usando la regla de Barrow.

Pero ello no impide que podamos afirmar que su derivada es $v'(x) = 2 \cos(2x)^2$, es decir, la derivada de la función $2x$ por la función $\cos t^2$, evaluada en $t = 2x$.

El razonamiento es el siguiente. Sabemos que la derivada de $F(u) = \int_0^u \cos t^2 dt$ es $F'(u) = \cos u^2$. Es claro que $v(x) = F(2x)$ y, por tanto, $v'(x) = 2F'(2x) = 2 \cdot \cos(2x)^2 = 2 \cos 4x^2$.

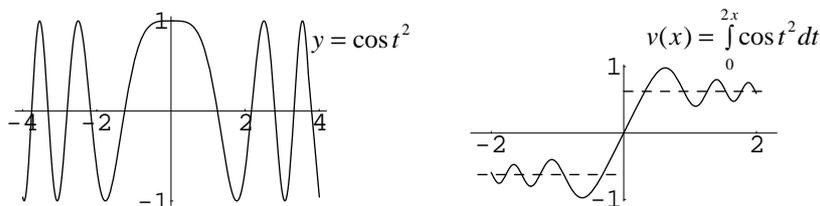


FIGURA 19: Gráfica de las funciones $y = \cos t^2$ y $v(x)$.

Ejemplos: Ahora el extremo de integración variable es el inferior. Calculamos las derivadas de las funciones: $g(x) = \int_x^1 \sqrt{1-t^2} dt$, $h(x) = \int_{-x}^0 \frac{1}{2+t} dt$.

1. Al ser $g(x) = \int_x^1 \sqrt{1-t^2} dt = -\int_1^x \sqrt{1-t^2} dt$, se deduce que $g'(x) = -\sqrt{1-x^2}$, para $x \in [-1, 1]$. Es decir, cuando el extremo de integración variable es el inferior, la derivada de la integral es la función original cambiada de signo.

Sólo por curiosidad escribimos el resultado de aplicar la regla de Barrow a la integral de este ejemplo: $g(x) = \int_x^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \arcsen x$.

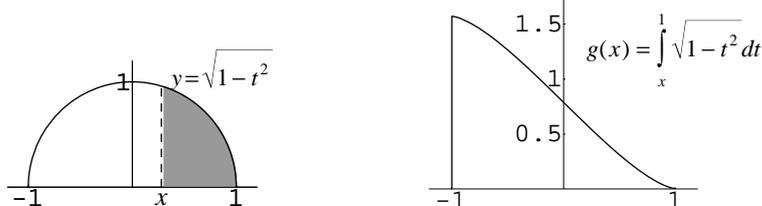


FIGURA 20 : Gráfica de las funciones $y = \sqrt{1-t^2}$ y $g(x) = \int_x^1 \sqrt{1-t^2} dt$.

2. Análogo es el cálculo de la derivada de $h(x) = \int_{-x}^0 \frac{1}{2+t} dt = -\int_0^{-x} \frac{1}{2+t} dt$. Así,

$$\text{de nuevo } h'(x) = -\frac{d(-x)}{dx} \cdot \frac{1}{2+(-x)} = \frac{1}{2-x}, \text{ para } x \in (-\infty, 2).$$

Ejemplos: El caso general consiste en suponer que ambos extremos de integración son variables. Calculamos las derivadas de las siguientes funciones:

$$g(x) = \int_{\cos x}^{\sen x} \frac{1}{2-t^2} dt, \quad h(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt.$$

1. Para obtener la derivada de esta función $g(x) = \int_{\cos x}^{\sen x} \frac{1}{2-t^2} dt$, escribimos

primero la función integral $F(u) = \int_a^u \frac{1}{2-t^2} dt$. Su derivada, para $u \in [-1, 1]$,

es $F'(u) = \frac{1}{2-u^2}$. Es fácil observar que $g(x) = F(\sen x) - F(\cos x)$, luego

$$g'(x) = \cos x \cdot F'(\sen x) - (-\sen x) \cdot F'(\cos x) = \frac{\cos x}{2-\sen^2 x} + \frac{\sen x}{2-\cos^2 x}.$$

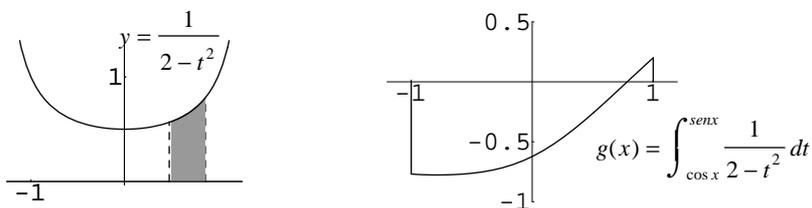


FIGURA 21: Gráfica de las funciones $y = \frac{1}{2-t^2}$ y $g(x)$.

La conclusión que se sigue de este ejemplo es que la derivada de la integral $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ es $g'(x) = v'(x) \cdot f(v(x)) - u'(x) \cdot f(u(x))$.

2. Ahora la derivada de $h(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$ es fácil: $h'(x) = f(x+1) - f(x)$.