Tema 10. Integrales impropias o generalizadas

En todo lo estudiado sobre integrales definidas hemos exigido de partida que f sea *acotada* en un intervalo *acotado* $[a,b]$. Pero hay que atender las nuevas situaciones que se presentan cuando f no es acotada en algún punto del intervalo de integración o cuando el intervalo de integración es no acotado. Esto es lo que vamos a hacer en este tema: ampliar el concepto de integral, definiendo las integrales impropias o generalizadas.

Definición: Una integral $\int_a^b f(x)dx$ se denomina *impropia* si

- el intervalo de integración es infinito, es decir, a o b o ambos son infinitos;
- el integrando no es acotado en uno o más puntos del intervalo de integración $[a,b]$.

Emprendemos el estudio de las integrales impropias siguiendo el guión:

1. *Integral en intervalos no acotados.*
2. *Integral de funciones no acotadas.*
3. *Algunas integrales impropias importantes.*
4. *Problemas propuestos.*

Integral en intervalos no acotados

Comenzamos escribiendo algunos ejemplos de este tipo de integrales impropias: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$, $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$, que irán teniendo sentido conforme vayamos dando sus definiciones.

- *La integral impropia* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Definición: Vamos a escribir el significado de la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Vamos a suponer que existe la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ para cualquier valor b, con $b > a$. Se define $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$.

Sólo en el caso de que el límite sea un número real, se dice que la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ existe o que es *convergente*.

M. Dolores Lerís
Universidad de Zaragoza, España

De acuerdo con esta definición, vamos a averiguar si existen las integrales que hemos puesto como ejemplo al comenzar este apartado y que son $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ y $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$.

La definición nos dice: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx$. La integral definida del segundo miembro la calculamos usando la regla de Barrow: $\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x} \right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}$. Naturalmente, el resultado es función de b, el extremo superior de integración. Finalmente, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1$. Por cierto, que este valor es el área del recinto plano limitado por arriba por la función $y = \frac{1}{x^2}$, por abajo por el eje de abscisas, por la izquierda por la recta vertical $x = 1$ y sin límite por la derecha.

Ahora la otra integral impropia: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx$. Otra vez calculamos la integral del segundo miembro usando la regla de Barrow: $\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[Ln|x| \right]_1^b = Lnb$. Por último, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} Lnb = +\infty$, es decir, no es convergente o bien no existe.

Se suelen escribir de forma más sencilla estos cálculos de integrales impropias. Se trata de usar la llamada regla de Barrow generalizada. El último ejemplo se escribe así: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \left[Ln|x| \right]_1^{x \to +\infty} = \lim_{x \to +\infty} Lnx - 0 = +\infty$.

Vamos a tratar un ejemplo más. La integral impropia $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x dx$ no existe, como lo confirma la siguiente cadena de igualdades que acaba en un límite que no existe:

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \operatorname{sen} x dx = \lim_{b \to +\infty} \left[-\cos x \right]_0^b = 1 - \lim_{b \to +\infty} \cos b.$$

El siguiente dibujo contiene las gráficas de las funciones de los tres ejemplos de integrales impropias que acabamos de resolver. En el párrafo que sigue se comentan las diferencias entre ellas.

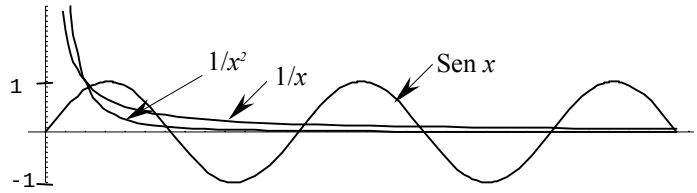

FIGURA 22: Gráficas de $1/x^2$, $1/x$, $\operatorname{sen} x$.

Es interesante que observemos el diferente comportamiento en $+\infty$ de las tres funciones que hemos integrado. Desde luego, hay una gran diferencia entre la función $y = \operatorname{sen} x$ y las funciones $y = \frac{1}{x^2}$ e $y = \frac{1}{x}$, pues la primera no tiene límite, cuando $x \to +\infty$, y las otras dos, positivas y decrecientes en $[1,+\infty)$, tienden a 0. Ahora bien, aunque la diferencia es más sutil, también la hay entre $y = \frac{1}{x^2}$ e $y = \frac{1}{x}$. ¿Cuál es esa diferencia? Surge de comparar las velocidades con que ambas funciones se acercan a 0, cuando $x \to +\infty$. Sin duda, es más veloz $y = \frac{1}{x^2}$ que $y = \frac{1}{x}$, como se aprecia en la gráfica conjunta siguiente:

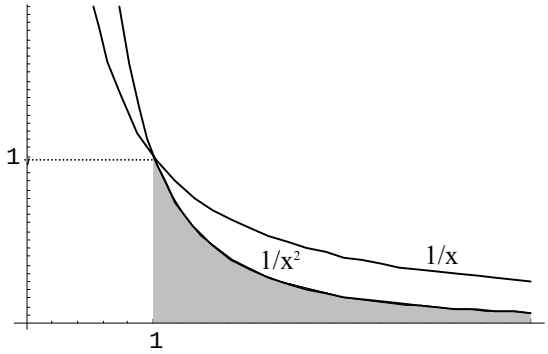

FIGURA 23: Comparación de $1/x$ y $1/x^2$.

Precisamente esta característica es la clave de que la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ exista pero la otra $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ no exista.

Es posible que estos últimos comentarios hagan creer falsamente que la existencia de $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ obliga a que $f(x) \to 0$, cuando $x \to +\infty$. La verdad es que no es tan descabellada dicha conclusión, si se advierte que el ejemplo $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ contiene una función especial: es continua, positiva y decreciente.

- *La integral impropia* $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$

Todavía no hemos calculado las otras dos integrales impropias escritas al comienzo. Eran $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$. Primero escribimos la definición, que es la que el lector ya sospecha. Es un buen ejercicio que se intente definir $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ antes de leer la definición para después confirmar si coincide con la que viene a continuación.

Definición: Damos ahora el significado de la integral impropia $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$. Suponemos que existe la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ para cualquier valor a, con $a < b$. Se define $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$.

Al igual que antes, se dice que la integral $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ existe, o que es *convergente,* sólo en el caso de que el límite sea un número real.

Calculamos $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$. La definición dice $\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 e^x dx$. Primero obtenemos el valor de la integral definida del segundo miembro: $\int_a^0 e^x dx = \left[e^x\right]_a^0 = 1 - e^a$, y ahora $\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a \to -\infty} \left(1 - e^a\right) = 1$. Así pues, la integral impropia $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$ converge a 1. Sin ninguna duda, 1 es el área de un recinto plano. ¿De cuál?

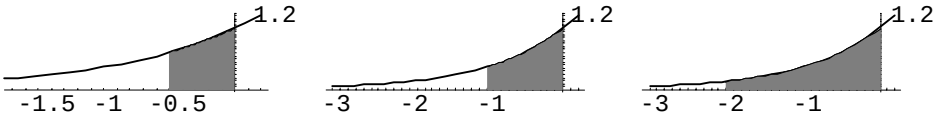

FIGURA 24: Representación gráfica de $\int_a^0 e^x dx$ con a= –0'5, –1, –2.

Por último, la definición de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ consiste en dividir el intervalo de integración en dos trozos. El punto de división no es importante, puede usarse el que nos convenga.

Definición: Se define $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$, siendo c cualquier número real.

Ahora se dice que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existe, o que es *convergente,* sólo en el caso de que los dos sumandos $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ y $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ existan.

La última integral que nos queda por calcular es $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$. La definición dice que dividamos el intervalo de integración y que queda a nuestra elección el punto de la partición. Elegimos como punto de partición el 0. Tendremos, pues, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$. Cada uno de los sumandos es una integral impropia de los tipos que ya hemos calculado, así que escribimos sin más comentarios los pasos de la solución:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{a\to-\infty} [\arctan x]_a^0 +$$

$$+ \lim_{b\to+\infty} [\arctan x]_0^b = \lim_{a\to-\infty} (-\arctan a) + \lim_{b\to+\infty} \arctan b = -\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Ejercicios: Calculamos las siguientes integrales impropias $\int_0^{+\infty} x \operatorname{sen} x dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}dx$ y $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$. Las gráficas de las funciones integrando están tras las soluciones. Se deja al lector que interprete si estas integrales nos dan el área de algún recinto plano y que, por supuesto, describa dicho recinto.

1. Comprobamos que la primera integral impropia $\int_0^{+\infty} x \operatorname{sen} x dx$ no existe. El método de integración por partes con la elección $\begin{cases} u = x & \Rightarrow \quad du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x dx & \Rightarrow \quad v = -\cos x \end{cases}$, conduce a

$$\int_0^{+\infty} x \operatorname{sen} x dx = \left[-x\cos x\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{x\to+\infty}\left(-x\cos x\right) + \operatorname{sen} x\Big|_0^{+\infty} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-x\cos x\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen} x\right)$$

y ninguno de los dos límites existe.

2. Para calcular esta integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5} dx$ aplicamos la extensión de la regla de Barrow a integrales impropias. Así:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2+4} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1/2}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\arctan\frac{x+1}{2}\right]_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\arctan\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\left(\arctan\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$. En este caso la técnica de cálculo de primitivas más aconsejable es la del cambio de variable $x = t^2$. Aplicándola se obtiene:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{2t\,dt}{(1+t^2)|t|} = \int_1^{+\infty} \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\left[\arctan t\right]_1^{t\to+\infty} =$$

$$= 2\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

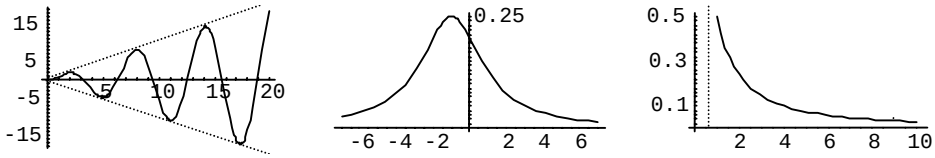

FIGURA 25: Gráficas de las funciones $x \operatorname{sen} x$, $\dfrac{1}{x^2+2x+5}$ y $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$.

- *Integrales impropias básicas*

Hay dos clases de integrales impropias consideradas básicas. Son $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$, donde p es un número real, y $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx$, siendo $a \in \mathbf{R}$. Todas ellas se calculan sin ninguna dificultad usando la definición de integral impropia y la regla de Barrow. Dejamos al lector que compruebe los siguientes resultados:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \text{no existe} & \text{si } p \le 1 \\ \dfrac{1}{p\text{-}1} & \text{si } p > 1 \end{cases}, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \begin{cases} \text{no existe} & \text{si } a \le 0 \\ \dfrac{1}{a} & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

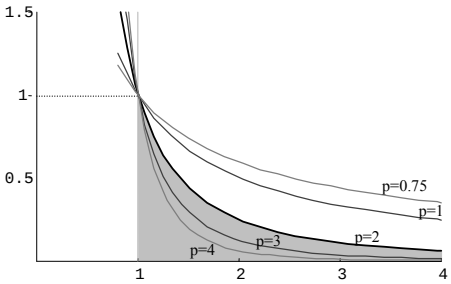

FIGURA 26: Gráficas de las funciones $\dfrac{1}{x^p}$ con p = 0.75, 1, 2, 3, 4.

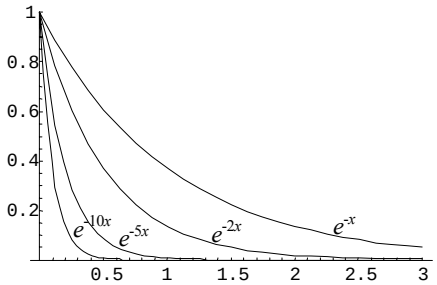

FIGURA 27: Gráficas de las funciones e^{-ax} con a = 1, 2, 5, 10

Integral de una función no acotada

Ahora los ejemplos que ilustran este tipo de integral impropia son: $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$, $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$. En el primer caso, la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ tiende a $+\infty$ cuando $x \to 1^+$, que es el extremo inferior de integración. Y en el segundo

caso, la función $g(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ tampoco es acotada en $x=-1$, que es el punto interior del intervalo de integración. Las gráficas lo muestran muy claramente:

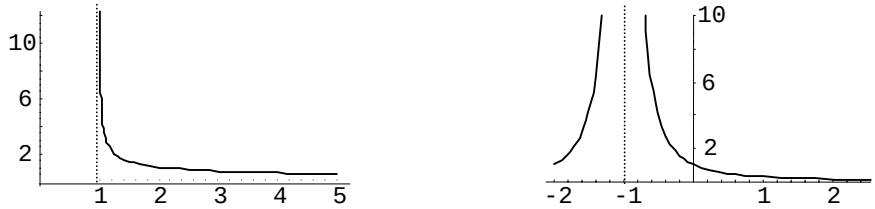

FIGURA 28: Gráficas de las funciones $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ y $\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Vamos a generalizar la idea de integral para que abarque este tipo de integrales. Lo hacemos en dos definiciones.

Definición: Damos en esta definición el significado de la *integral impropia* $\int_a^b f(x)dx$ *cuando* f *no es acotada en el punto* $x=a$, el extremo inferior del intervalo de integración.

Supongamos que existe la integral definida $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ para cualquier valor $\varepsilon>0$, es decir, f es integrable en intervalos reducidos en longitud por el punto problemático . Se define $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$.

La integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ se dice que existe o que es *convergente*, solamente en el caso de que sea un número real el límite que la define.

Ahora ya podemos calcular $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$. La definición aplicada a esta integral dice que $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{5} \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$. En primer lugar calculamos la integral definida del segundo miembro; nos sale que

$$\int_{1+\varepsilon}^{5} \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \left[2\sqrt{x-1}\right]_{1+\varepsilon}^{5} = 4-2\sqrt{\varepsilon}\ ,$$

y tomando límites: $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = 4-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sqrt{\varepsilon} = 4$.

También se acepta escribir la generalización de la regla de Barrow, y, así, el ejemplo que acabamos de resolver se escribe del modo siguiente:

$$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \left[2\sqrt{x-1}\right]_{x\to 1^+}^5 = 4 - 2\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1} = 4\,.$$

Obsérvese que de nuevo esta integral es el área de un recinto plano ilimitado.

Basta que definamos la integral de una función no acotada en el extremo superior de integración para que hayamos terminado de dar todas las definiciones. Aquí está, pues, la última definición.

Definición: Escribimos el significado de la *integral impropia* $\int_a^b f(x)dx$ *cuando* f *no es acotada en el punto* $x=b$*,* el extremo superior del intervalo de integración.

Si existe la integral definida $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ para cualquier valor $\varepsilon > 0$, es decir, f es integrable en intervalos reducidos en longitud por el punto problemático. Se define $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

El vocabulario usado hasta ahora sigue siendo válido en este caso: La integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ se dice que existe, o que es *convergente*, solamente en el caso de que sea un número real el límite que la define.

Nos queda un ejemplo inicial sin resolver: $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$. Ya observamos que el problema de no acotación de la función $g(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ está en $x=-1$, que es punto interior del intervalo de integración. Como esta integral impropia no se ajusta a los casos definidos, es necesario la adaptación previa: $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \int_{-1}^{2} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$. El siguiente objetivo es calcular cada uno de los dos sumandos:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x+1}\right]_{-2}^{x\to -1^-} = \lim_{x\to -1^-}\frac{-1}{x+1} - 1 = -\infty\,,$$

es decir, no existe. No es necesario que calculemos el otro sumando, pues, si uno de ellos no existe, ya es suficiente para decir que la integral $\int_{-2}^{2} \frac{1}{(x+1)^2} dx$ no existe.

Ejercicios: Calculamos las siguientes integrales impropias $\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$. Las gráficas de las funciones son:

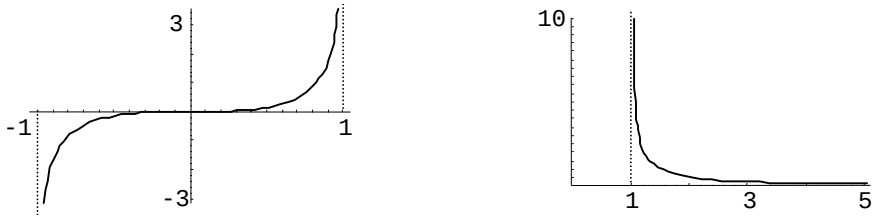

FIGURA 29: Gráficas de las funciones $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ y $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$.

1. La primera integral $\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ es impropia, pues la función integrando $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ no es acotada ni en $x=-1$, extremo inferior del intervalo de integración, ni en $x=1$, extremo superior del intervalo de integración. El primer paso es dividir el intervalo de integración en dos partes, la elección del punto de la partición es libre. Haciendo uso de esa libertad, decidimos: $\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_{0}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Las dos integrales que aparecen las calculamos usando el cambio de variable $1-x^2=t^2$; tenemos: $\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{0}^{1} \frac{1-t^2}{|t|}(-tdt) = \int_{0}^{1}(t^2-1)dt = \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_0^1 = -\frac{2}{3}$, y el otro sumando $\int_{0}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{1}^{0} \frac{1-t^2}{|t|}(-tdt) = \frac{2}{3}$. Así pues, $\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$.

Ciertamente, se trataba de un resultado previsible: al observar que la función $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ es impar y que el intervalo de integración $[-1,1]$ es simétrico, se concluye que la integral es 0. La pregunta es entonces inevitable: ¿para qué nos hemos molestado en hacer todos estos cálculos? Muy sencillo, al comenzar el trabajo faltaba una información básica y era responder a esta pregunta: ¿existe la integral? Sólo la respuesta afirmativa nos permite concluir que el resultado es 0. En fin, hemos trabajado sólo para contestar a la pregunta sobre la existencia de la integral.

2. La integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$ es impropia por doble motivo. La función $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1-x}}$ no es acotada en $x=1$ y el intervalo de integración tampoco es acotado. Usamos el cambio de variable $x-1=t^2$, y así:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{2t}{\left(1+t^2\right)|t|}dt=\int_0^{+\infty}\frac{2}{1+t^2}dt=2\left[\arctan t\right]_0^{t\to+\infty}=2\frac{\pi}{2}=$$
$$=\pi .$$

Algunas integrales impropias importantes

La integral impropia aparece en muy diferentes contextos. Sólo mencionamos un tipo de funciones que se definen mediante integrales impropias: las *funciones eulerianas*, y llamamos la atención sobre dos aspectos de inmediato interés en los que aparecen integrales impropias: *la Transformada de Laplace* y *la Teoría de probabilidad*.

- *Las funciones eulerianas*

Dos funciones, que tienen no poco interés, se definen mediante integrales impropias. Son estas dos: la función *gamma de Euler* $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{p-1}dx$, convergente para todo $p>0$, y la función *beta de Euler* $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, convergente para todo $p>0$ y $q>0$.

Como las funciones eulerianas no se pueden expresar mediante funciones elementales, hay que estudiarlas acudiendo a las propiedades de las llamadas

integrales paramétricas, que permiten obtener información, acerca de la integral, a partir del análisis de la función integrando.

Una curiosidad final: la función gamma de Euler verifica $\Gamma(n) = (n-1)!$ cuando n es un número natural.

- *La Transformada de Laplace*

Quizás sea muy atrevido decir que un ingeniero no puede trabajar sin la Transformada de Laplace, pero creemos que es constatable el amplio uso que de ella se hace en las diferentes disciplinas de la ingeniería.

¿Qué es la transformación de Laplace? Se trata de convertir o transformar una función dada $f(t)$ en otra función $F(s)$. ¿Para qué se hacen estas transformaciones? La idea es que problemas descritos en términos de $f(t)$, en el dominio temporal, queden escritos en términos de la otra función $F(s)$, en el dominio de frecuencias, y así conseguir resolver dichos problemas o llegar a un conocimiento más profundo de los mismos. Las aplicaciones técnicas clarificarán esta idea.

Definición: Sea $f(t)$ una función definida para $t \geq 0$. La Transformada de Laplace de f se define como: $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$, siempre que esta integral impropia exista. Se suele escribir: $F = \mathcal{L}\{f\}$.

Existen tablas muy completas en las que aparecen diferentes funciones f junto con sus transformadas de Laplace $F = \mathcal{L}\{f\}$. Veamos sólo algunos ejemplos.

Ejemplos: Comprobamos que los resultados expuestos en la siguiente tabla son correctos:

$f(t),\ t \geq 0$	$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$
$f(t) = 1$	$F(s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$
$f(t) = t$	$F(s) = \frac{1}{s^2}$, $s > 0$
$f(t) = e^{at}$	$F(s) = \frac{1}{s-a}$, $s > a$

TABLA 1: *F(s)= ℒ{f}(s)* es la Transformada de Laplace de *f(t).*

1. Si $f(t)=1$, entonces su Transformada de Laplace es $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}1dt$. Calculemos esta integral:

$$F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}1dt=\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_{t=0}^{t\to+\infty}=-\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-st}}{s}+\frac{1}{s}=\begin{cases}\frac{1}{s} & \text{si } s>0\\ \text{no existe} & \text{si } s\le 0\end{cases}.$$

2. Si $f(t)=t$, entonces su Transformada de Laplace es $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}tdt$. Para calcular esta integral, usamos el método de integración por partes; elegimos $\begin{cases} u=t\Rightarrow du=dt\\ dv=e^{-st}dt\Rightarrow v=-\frac{e^{-st}}{s}\end{cases}$, y así tenemos:

$$F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}tdt=\left[-t\frac{e^{-st}}{s}\right]_{t=0}^{t\to+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-st}}{s}dt=-\frac{1}{s}\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{st}}+\frac{1}{s}\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2}$$

para valores $s>0$.

3. Si $f(t)=e^{at}$, entonces su Transformada de Laplace $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}dt$ está calculada a continuación:

$$F(s)=\int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}dt=\left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_{t=0}^{t\to+\infty}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}-\frac{1}{a-s}=\begin{cases}\frac{1}{s-a} & \text{si } s>a\\ \text{no existe} & \text{si } s\le a\end{cases}.$$

- *Teoría de la probabilidad*

La teoría de la probabilidad considera variables X que llama aleatorias. Un tipo de estas variables aleatorias son las continuas. Se mide la probabilidad de los valores de estas variables mediante funciones f no negativas, denominadas funciones de densidad de probabilidad, que verifican la propiedad $\int_{-\infty}^{+\infty} f=1$. Se calcula la probabilidad de que X tome valores entre dos números reales a y b mediante: $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$.

El ejemplo más importante es la variable aleatoria normal o de Gauss. La función de densidad de probabilidad de la variable normal estándar Z es $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$, la famosa campana de Gauss. Aseguramos que $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=1.$

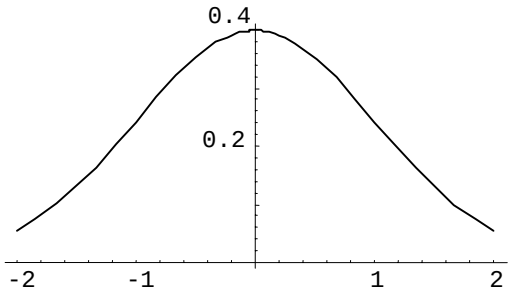

FIGURA 30: Campana de Gauss.

Vamos a comprobar que la media de la variable normal estándar es 0. Por definición, Media$=\mu=\int_{-\infty}^{+\infty}t\ f(t)dt$. Así pues, hemos de comprobar que $\mu=\int_{-\infty}^{+\infty}z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=0$. En efecto,

$$\mu=\int_{-\infty}^{+\infty}z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{1}{2}z^2}\right]_{z\to-\infty}^{z\to+\infty}=0$$

Comprobemos también que la varianza es $\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=1$. Para calcular esta integral, usamos el método de integración por partes con $\begin{cases} u=z \quad\Rightarrow\quad du=dz \\ dv=ze^{-\frac{1}{2}z^2}dz\Rightarrow v=-e^{-\frac{1}{2}z^2} \end{cases}$:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-ze^{-\frac{1}{2}z^2} \right]_{z\to-\infty}^{z\to+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz ,$$

como los dos límites del primer sumando son 0 y la integral del segundo sumando hemos afirmado que vale 1, tenemos que $\sigma^2 = 1$.

- *Otras integrales*

La integral de Dirichlet: $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} Ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, siendo $A > 0$. Integral que interviene en el estudio de la distribución de la temperatura en una placa en condiciones estacionarias.

Las integrales de Fresnel: $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$. Estas integrales aparecen en el problema de la difracción de la luz. Aunque el extremo superior de integración no corresponde a ningún fenómeno físico, las integrales en el intervalo $[0, b]$, cuando b toma valores grandes, difieren muy poco de las que se obtienen en el intervalo de integración $[0, +\infty)$.