Tema 11. Matrices

11.1. Matrices. Operaciones con matrices

Introducimos las matrices y las operaciones con matrices como medio para representar de forma más concisa los sistemas lineales y las operaciones que los simplifican (técnica de eliminación gaussiana). Así pues, tanto la escritura matricial como las operaciones con matrices se justificarán mediante los sistemas de ecuaciones lineales.

Matrices y operaciones vectoriales

Definición: Una *matriz* es un cuadro de números, reales o complejos, dispuestos en m filas y n columnas.

Las matrices se suelen escribir con letras mayúsculas A, B, etc. Los elementos que forman la matriz se designan con esa misma letra, en minúscula, afectada de dos subíndices; por ejemplo a_{21} significa que nos estamos refiriendo a la entrada o número del cuadro que está situado en la segunda fila y primera columna. Así por ejemplo, para la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos $a_{21} = 4$.

Las matrices se clasifican según su forma en:

— Matrices *cuadradas:* si el número de filas es igual que el número de columnas. En lugar de decir que la matriz cuadrada es de dimensiones $n \times n$, se suele indicar que su *orden* es n.

— Matrices *rectangulares:* si el número m de filas es diferente del número n de columnas.

Las operaciones básicas con matrices son la suma de dos matrices y la multiplicación de una matriz por un escalar. Ambas se hacen exactamente de la misma manera que con los vectores, componente a componente.

Así pues, la suma de dos matrices (de las mismas dimensiones) es otra matriz cuyas entradas son el resultado de sumar las entradas que ocupan su mismo lugar en cada una de las matrices sumando. De igual modo, al multiplicar una matriz por un escalar se obtiene otra matriz cuyas entradas son el resultado de multiplicar las de la matriz original por dicho escalar. Veamos un ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}; \quad 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 6 & 9 & 24 \end{pmatrix}.$$

Estas dos operaciones gozan de las mismas propiedades que las correspondientes de los vectores geométricos.

Producto de matriz por vector: escritura matricial de un sistema lineal

Usamos como ejemplo de referencia el sistema $\begin{cases} 2u + v + w = 1 \\ 4u + v = -2 \\ -2u + 2v + w = 7 \end{cases}$, en el cual aparecen tres tipos diferentes de elementos:

— Las incógnitas o vector de incógnitas: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

— Los términos independientes de las ecuaciones: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

— Un conjunto de nueve coeficientes numéricos en el lado izquierdo de las ecuaciones, que se disponen en un cuadro de tres filas por tres columnas, una *matriz* 3×3, llamada matriz de los coeficientes: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

El sistema $\begin{cases} 2u + v + w = 1 \\ 4u + v = -2 \\ -2u + 2v + w = 7 \end{cases}$ se escribe en forma matricial como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, es decir, $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$. Sólo es necesario que comentemos el lado izquierdo, en el que aparece el vector columna de las incógnitas premultiplicado por la matriz de coeficientes.

Si nos fijamos en las filas o ecuaciones del sistema, es obvio que esta multiplicación ha de dar lugar a las ecuaciones de las que partíamos. En consecuencia, la multiplicación de la primera fila de la matriz de coeficientes

A por el vector columna de incógnitas debe ser igual a $2u+v+w$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2u+v+w \\ - \\ - \end{pmatrix},$$

que podemos interpretar como el producto escalar del vector fila $(2,1,1)$ por el vector columna $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$. Del mismo modo, la multiplicación de la segunda o tercera fila de la matriz de coeficientes A por el vector columna de incógnitas es también el producto escalar de cada una de las filas por el vector de incógnitas:

$$\begin{pmatrix} - & - & - \\ 4 & 1 & 0 \\ - & - & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} - \\ 4u+v \\ - \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} - \\ - \\ -2u+2v+w \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, esta operación tiene otra interpretación que es sin duda muy importante. Llegamos a ella escribiendo el producto de la matriz de coeficientes por el vector de incógnitas de acuerdo con las conclusiones anteriores como:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} 2u+1v+1w \\ 4u+1v+0w \\ -2u+2v+1w \end{pmatrix}=u\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}+v\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+w\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir, el producto de una matriz A por un vector columna $\mathbf{x}$ es la combinación lineal de las columnas A ponderadas por las entradas del vector $\mathbf{x}$. Hemos obtenido de nuevo la escritura vectorial del sistema lineal:

$$u\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}+v\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+w\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Veamos algunos ejemplos más de producto de matriz por vector.

Ejercicio 1:

1. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}3+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}4+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}5=\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 17 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 2i & 1+i \\ -3 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2+3i \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} 2i \\ -3 \end{pmatrix}+(2+3i)\begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+17i \\ -21+2i \end{pmatrix}$.

Producto de matrices

Quizás la forma más sencilla de justificar la regla del producto de matrices consista en tomar como referencia el ya conocido producto de matriz por vector columna y generalizarlo al caso en que el segundo factor contenga más de una columna. Así lo hacemos en el siguiente ejemplo.

El producto de la matriz A por la matriz B, que contiene dos columnas, es una matriz de dos columnas también, cada una de ellas resultado del producto de la matriz A por cada columna de B:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} u & a \\ v & b \\ w & c \end{pmatrix}}_{B}=\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}}_{1.^{a}\ columna} & \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{2.^{a}\ columna} \end{pmatrix}$$

Regla de cálculo de cada entrada de la matriz AB**:** Supongamos que A es una matriz de dimensión $m\times n$ y que B es de dimensión $n\times p$ (nótese que el número de columnas de A coincide con el número de filas de B). El elemento (i,j) de la matriz AB es el producto escalar de la fila i-ésima de A y la columna j-ésima de B. Por ejemplo el elemento $(2,5)$ de la matriz AB se calcula así:

$$(AB)_{25}=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}}_{2.^{a}\ fila\ de\ A}\underbrace{\begin{pmatrix} b_{15} \\ b_{25} \\ \vdots \\ b_{n5} \end{pmatrix}}_{5.^{a}\ columna\ de\ B}=a_{21}b_{15}+a_{22}b_{25}+\ldots+a_{2n}b_{n5}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k5}.$$

Ejercicio 2:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+0\cdot 2 & 2\cdot 3+0\cdot 0 & 2\cdot 1+0\cdot(-1) \\ 1\cdot 1+3\cdot 2 & 1\cdot 3+3\cdot 0 & 1\cdot 1+3\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$

2. Calculemos AB y BA, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   — El primer producto AB es el producto escalar del vector fila $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$ por el vector columna $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; es decir, $AB=\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=0$.

   — En cuanto al segundo producto, $BA=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. El resultado es bien distinto al anterior. Este ejemplo sirve para ilustrar la no conmutatividad, en general, del producto de matrices.

3. Calculamos las potencias A^2, A^3, B^2, B^3, C^2 y C^3, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad C=AB=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

— Por un lado, las potencias sucesivas de la matriz A son:

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=A, \text{ luego } A=A^2=A^3=\ldots$$

— En cuanto a las potencias de B tenemos:

$$B^2=BB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2,$$

luego $B^3=B^2B=I_2B=B$.

— Finalmente, cuando $C=AB=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, tenemos:

$$C^2=CC=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ y } C^3=C\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ahora nos vamos a detener un poco más en la comprensión del producto de matrices. Especialmente queremos prestar atención a la interpretación del producto de matrices AB en términos de las columnas de A y en términos de las filas de B.

Empezamos con las columnas: Cada columna de AB es una combinación lineal de las columnas de A ponderadas por las entradas de B (precisamente por la correspondiente columna de B).

Observemos un ejemplo anterior:

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+0\cdot 2 & 2\cdot 3+0\cdot 0 & 2\cdot 1+0\cdot(-1)\\ 1\cdot 1+3\cdot 2 & 1\cdot 3+3\cdot 0 & 1\cdot 1+3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6 & 2\\ 7 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

La primera columna del producto es una combinación lineal de las dos columnas $\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}$ del primer factor A siendo los coeficientes las entradas de la primera columna del segundo factor B:

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & — & —\\ 2 & — & —\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+0\cdot 2 & — & —\\ 1\cdot 1+3\cdot 2 & — & —\end{pmatrix}.$$

Del mismo modo la segunda y la tercera columnas del producto son una combinación lineal de las dos columnas $\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}$ del primer factor, ponderadas por las entradas de la segunda y de la tercera columna del segundo

factor, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} — & 3 & — \\ — & 0 & — \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} — & 2\cdot 3+0\cdot 0 & — \\ — & 1\cdot 3+3\cdot 0 & — \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} — & — & 1 \\ — & — & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} — & — & 2\cdot 1+0\cdot(-1) \\ — & — & 1\cdot 1+3\cdot(-1) \end{pmatrix}.$$

La segunda interpretación, cuando nos fijamos en las filas de AB, es la que interesa en la eliminación gaussiana: cada fila de AB es una combinación lineal de las filas de B cuyos coeficientes son las entradas de la correspondiente fila de A.

De nuevo observamos el ejemplo:

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+0\cdot 2 & 2\cdot 3+0\cdot 0 & 2\cdot 1+0\cdot(-1) \\ 1\cdot 1+3\cdot 2 & 1\cdot 3+3\cdot 0 & 1\cdot 1+3\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

La primera fila del producto es efectivamente una combinación lineal de las dos filas $(1,3,1)$ y $(2,0,-1)$ del segundo factor B, ponderadas por las entradas de la primera fila del primer factor A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ — & — \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot\mathbf{1}+ & 2\cdot\mathbf{3}+ & 2\cdot\mathbf{1}+ \\ 0\cdot\mathbf{2} & 0\cdot\mathbf{0} & 0\cdot(\mathbf{-1}) \\ — & — & — \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo la segunda fila del producto es una combinación lineal de las dos filas $(1,3,1)$ y $(2,0,-1)$ de la matriz del segundo factor B, ponderadas por las entradas ahora de la segunda fila del primer factor A:

$$\begin{pmatrix} — & — \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} — & — & — \\ 1\cdot\mathbf{1}+ & 1\cdot\mathbf{3}+ & 1\cdot\mathbf{1}+ \\ 3\cdot\mathbf{2} & 3\cdot\mathbf{0} & 3\cdot(\mathbf{-1}) \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3: La primera fila de AB es una combinación lineal de todas las filas de B. En esta combinación, ¿cuáles son los coeficientes y cuál es la primera fila de AB si $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

La primera fila de AB es el resultado de multiplicar la primera fila de A por la matriz B:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2(1.^{\text{a}}\text{ fila})+1(2.^{\text{a}}\text{ fila})+4(3.^{\text{a}}\text{ fila}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ & \end{pmatrix}.$$

Los coeficientes, por los que nos preguntamos, son las entradas de la primera fila de A.

Ejercicio 4: Averigüemos si son verdaderas o falsas cada una de las afirmaciones que están entre comillas:

a) «Si la primera y la tercera columnas de B son iguales, también lo son la primera y la tercera columnas de AB».

Esta afirmación es verdadera, pues la primera y tercera columnas de B son los pesos (en este caso iguales) de la combinación lineal de las columnas de A que producen la primera y la tercera columnas de AB, respectivamente.

b) «Si la primera y la tercera filas de B son iguales, también lo son la primera y la tercera filas de AB».

En general, es falsa. Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ \text{—} & \text{—} & \text{—} \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, que no tiene la primera y tercera fila iguales.

c) «Si la primera y la tercera filas de A son iguales, también lo son la primera y la tercera filas de AB».

Es cierta, ya que la primera y tercera filas de A son los coeficientes (en este caso iguales) de la combinación lineal de las filas de B que dan lugar a la primera y la tercera filas de AB, respectivamente.

Una vez definida una operación en un conjunto conviene conocer sus propiedades y eso es lo que hacemos a continuación, enunciar las propiedades de la operación producto de matrices:

Propiedades: Las matrices que aparecen en estas propiedades han de tener el tamaño adecuado para que se puedan realizar las operaciones que se indican.

1. Asociativa: $(AB)C = A(BC)$
2. Distributivas: $A(B+C) = AB + AC$ y $(B+C)D = BD + CD$
3. No conmutativa, en general: $AB \neq BA$
4. El elemento neutro es la matriz identidad $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, pues verifica $IA = AI = A$.
5. Algunas matrices cuadradas A tienen inversa, denotada A^{-1}, que verifica: $A^{-1}A = I = AA^{-1}$. Por cierto que la inversa de un producto de matrices inversibles es $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

La no conmutatividad, en general, del producto de matrices nos obliga a manejar con extremo cuidado esta operación y no sucumbir a la tentación de aplicar todas las fórmulas del producto de números (que sí es conmutativo) al producto de matrices, ya que pueden ser incorrectas. Veamos algunos casos:

Ejercicio 5: En general, $(AB)^2 \neq A^2B^2$ y $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$, entre otras.

a. La igualdad $(AB)^2 = A^2B^2$ es falsa, en general, pues depende de la conmutatividad del producto: $(AB)^2 = ABAB = A(BA)B \neq A(AB)B = A^2B^2$.

b. Como $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$, la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ es cierta sólo cuando las matrices A y B conmutan.

Hemos mencionado que algunas matrices cuadradas tienen inversa. Este hecho tiene una repercusión teórica en la resolución de sistemas lineales, aunque es de escasa importancia en la práctica de la obtención de las soluciones. Se trata de que los sistemas lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ cuya matriz de coeficientes A es inversible permiten despejar el vector de las incógnitas y así escribir: $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Pero como ya hemos dicho, esa fórmula rara vez tiene interés práctico, pues obtener la matriz inversa A^{-1} es, en general, más complicado que resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por eliminación gaussiana. No obstante, no queremos escatimar al lector una información de gran interés: si la matriz de coeficientes A además de inversible es ortogonal, entonces el asunto es muy diferente y desde luego que se usa la fórmula $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, pues, en este caso, A^{-1} se consigue con mucha facilidad.

Para terminar esta sección, incluimos un ejemplo de aplicación del producto de matrices. En este ejemplo se aprecia la importancia del orden de los factores en el producto de matrices; además de permitirnos experimentar con la fórmula de la inversa del producto de matrices inversibles.

Ejercicio 6: Consideremos un robot que se mueve en el plano. Su posición (x,y) y su orientación θ se describen mediante el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.

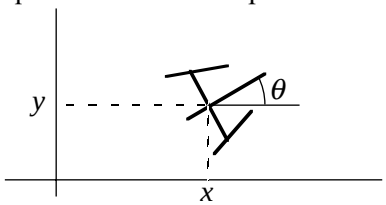

FIGURA 4: Robot colocado en el punto (x,y) y con orientación θ.

Admitimos dos movimientos del robot: avanzar o retroceder una distancia d en la dirección de su orientación y girar un ángulo α. Estos movimientos se describen mediante matrices como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + d\cos\theta \\ y + d\sin\theta \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \cos(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada a la sucesión de movimientos: primero, adelantar 10 unidades, luego girar $\pi/2$ y, por último, retroceder 5 unidades es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Tercero: retroceder 5 unidades}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}}_{\text{Segundo: girar } \frac{\pi}{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Primero: adelantar 10 unidades}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz nos permite obtener la posición final del robot conociendo su posición inicial. Si, por ejemplo, el robot está en el punto $(x,y)=(1,2)$ y orientado según $\theta=\frac{\pi}{4}$, la posición final y orientación del robot tras la sucesión de movimientos se calcula así: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+7.5\sqrt{2} \\ 2+2.5\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; es decir, el robot ha pasado del punto $(x,y)=(11.6,5.5)$ y orientado hacia $\theta=\frac{3\pi}{4}$.

Pensemos ahora en cómo retroceder a la posición inicial. La sucesión de movimientos debe ser: primero, adelantar 5 unidades, luego girar $-\frac{\pi}{2}$ y, finalmente, retroceder 10 unidades. Por tanto, la matriz asociada es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{retroceder 10 unidades}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\frac{-\pi}{2} & -\sin\frac{-\pi}{2} \\ 0 & 0 & \sin\frac{-\pi}{2} & \cos\frac{-\pi}{2} \end{pmatrix}}_{\text{girar } -\frac{\pi}{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{adelantar 5 unidades}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que para invertir el producto de tres matrices ABC se ha tenido que efectuar el producto de las inversas de cada factor en el orden opuesto $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

11.2. Matrices elementales. Factorización LU de una matriz

La expresión matricial de los pasos de la eliminación gaussiana nos permite expresar la matriz de coeficientes A como el producto de una matriz triangular inferior L y una triangular o escalonada superior U, expresión que es conocida como factorización LU de la matriz A.

Matrices elementales

Para describir matricialmente el proceso de eliminación gaussiana es necesario recurrir a tres tipos de matrices, llamadas matrices elementales, que van a producir precisamente las tres operaciones elementales de la eliminación.

1. Las matrices $E_{ij}(l)$ que se forman a partir de la matriz identidad, cambiando el cero de la entrada (i, j) por el número $l \neq 0$.

   Por ejemplo, $E_{21}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. La matriz D_i es la matriz identidad en la que se ha sustituido el valor 1 que ocupa el lugar i-ésimo de la diagonal por el número $d_i \neq 0$.

   Por ejemplo, $D_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$.

3. Las matrices permutación P formadas al intercambiar filas de la matriz identidad.

   Por ejemplo, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde se han intercambiado las filas primera y tercera de la matriz identidad.

El producto de cada una de estas matrices por la matriz de coeficientes de un sistema lineal produce como efecto una de las operaciones elementales de la eliminación gaussiana. Lo comprobamos a través de algunos ejemplos.

Comenzamos con las matrices elementales del tipo $E_{ij}(l)$.

Ejercicio 7: ¿Qué le sucede a una matriz A de tamaño 3×3 si la premultiplicamos por $E_{31}(4)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\4&0&1\end{pmatrix}$ o por $E_{23}(5)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix}$? ¿Qué sucede si postmultiplicamos para formar AE_{31}?

Al premultiplicar la matriz A por $E_{31}(4)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\4&0&1\end{pmatrix}$, las filas de esta matriz elemental contiene los pesos de las combinaciones lineales de las filas de A que producen las filas del producto. Así pues, $E_{31}(4)\cdot A$ es el resultado de sustituir la tercera fila de la matriz A por la suma de la tercera fila más cuatro veces la primera de A:

$$E_{31}(4)\cdot A=\begin{pmatrix}\text{1.ª fila de } A\\ \text{2.ª fila de } A\\ \text{3.ª fila de } A+4(\text{1.ª fila de } A)\end{pmatrix}.$$

Análogamente al premultiplicar la matriz A por $E_{23}(5)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix}$, las filas de esta matriz elemental contiene los pesos de las combinaciones lineales de las filas de A que producen las filas del producto. Así pues, el resultado $E_{23}(5)\cdot A$ es una matriz cuya primera y tercera filas son las mismas que las correspondientes de A; sin embargo la segunda fila de $E_{23}(5)\cdot A$ es el resultado de sumar a la segunda fila de A cinco veces la tercera: $E_{23}(5)\cdot A=\begin{pmatrix}\text{1.ª fila de } A\\ \text{2.ª fila de } A+5(\text{3.ª fila de } A)\\ \text{3.ª fila de } A\end{pmatrix}$.

Si ahora postmultiplicamos la matriz A por $E_{31}(4)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\4&0&1\end{pmatrix}$, el resultado es una matriz que proviene de A modificando una de sus columnas. Basta pensar que el segundo factor es ahora $E_{31}(4)$ y contiene los pesos de la combinación lineal de las columnas de A que producen $A\cdot E_{31}(4)$. Así pues la modificación que se produce es que la primera columna se convierte en la suma de la primera columna más cuatro veces la tercera columna de A:

$$A\cdot E_{31}(4)=\begin{pmatrix}\text{1.ª columna de } A+\\ 4(\text{3.ª columna de } A)\end{pmatrix}\quad \text{2.ª columna de } A\quad \text{3.ª columna de } A\Bigg).$$

Ejercicio 8: Consideremos la matriz $E = E_{21}(6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.
Vamos a calcular E^2, E^8 y, en general, E^n y respondemos a la pregunta ¿cuál es la «inversa» de E?

La matriz $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ premultiplicando a cualquier otra matriz deja inalterable la primera fila de ésta y modifica la segunda añadiéndole seis veces la primera. En consecuencia,

$$E^2 = EE = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E^3 = EE^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 18 & 1 \end{pmatrix},$$

y en general, $E^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6n & 1 \end{pmatrix}$.

En cuanto a la inversa de la matriz $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, E^{-1} debe anular la acción que E realiza, es decir, debe recuperar la segunda fila inicial para lo cual ha de restar a la segunda fila 6 veces la primera. En consecuencia, afirmamos que $E^{-1} = [E_{21}(-6)]^{-1} = E_{21}(-6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$. Efectivamente, es sencillo comprobar que $E_{21}(6) \cdot E_{21}(-6) = E_{21}(-6) \cdot E_{21}(6) = I_2$.

Conclusión: Dada una matriz A, el producto $E_{ij}(l) \cdot A$ es una matriz cuyas filas coinciden con las de A salvo la i-ésima que es el resultado de sumar a la fila i-ésima l veces la fila j-ésima de A. Si el producto se realiza en orden inverso $A \cdot E_{ij}(l)$, la conclusión es que ahora las columnas de A son las protagonistas y sobre ellas se produce un efecto análogo al descrito antes para las filas.

El siguiente objetivo es averiguar cómo actúan las matrices elementales del tipo D_i. Al igual que antes, el ejemplo siguiente nos ayuda a llegar a las conclusiones:

Ejercicio 9: Veamos qué le sucede a una matriz A de tamaño 2×2 si la premultiplicamos por $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ¿y qué le pasará si la postmultiplicamos para formar AD? ¿Cuál es la inversa de D?

Si la matriz $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ premultiplica a cualquier otra matriz A de tamaño 2×2, el resultado es una matriz cuya primera fila es el triple de la primera fila

de A y la segunda es el doble de la segunda fila de A:

$$DA=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a & 3b\\ 2c & 2d\end{pmatrix}.$$

Si ahora la matriz $D=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ postmultiplica a la matriz A el producto AD contiene como primera columna el triple de la primera columna de A y como segunda columna el doble de la segunda columna de A:

$$AD=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a & 2b\\ 3c & 2d\end{pmatrix}.$$

Finalmente, la inversa de $D=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ ha de ser la matriz $D^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$.

Conclusión: Esperamos que el lector no albergue ninguna duda sobre cuál es la conclusión, así que le proponemos el ejercicio de describir el efecto que produce la multiplicación D_iA sobre las filas de A y la multiplicación AD_i sobre las columnas de A.

Por último, sólo nos queda averiguar cómo actúan las matrices permutación. Se comprueba en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 10: Consideramos ahora las matrices de permutación $P=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ y $Q=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y nos preguntamos: ¿qué acción realizan sobre una matriz A las multiplicaciones PA y AP?, ¿y las multiplicaciones QA y AQ? ¿Cuáles son las inversas de estas matrices de permutación P y Q?

La multiplicación PA intercambia las filas primera y tercera de la matriz A; la multiplicación AP intercambia ahora las columnas primera y tercera de la matriz A:

$$PA=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g & h & i\\ d & e & f\\ a & b & c\end{pmatrix} \text{ y } AP=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & b & a\\ f & e & d\\ i & h & g\end{pmatrix}.$$

Como la matriz Q es el resultado de realizar dos intercambios de filas (o de columnas), la primera con la segunda y la segunda con la tercera (el orden en que se realice el intercambio no altera el resultado) sobre la matriz identidad, del mismo modo las matrices producto QA y AQ resultan de los mismos intercambios sobre las filas y las columnas de A, respectivamente.

En cuanto a las inversas de estas matrices de permutación P y Q, basta pensar que para retroceder sus acciones sólo hay que volver a aplicarlas, es decir, $P^{-1} = P$ y $Q^{-1} = Q$.

Factorización LU: eliminación gaussiana sin intercambio de filas

El objetivo de esta sección es expresar en términos de productos de matrices el proceso completo de la eliminación gaussiana. Primero vemos unos ejemplos y luego escribimos las características de los factores L y U.

Comenzamos con el sencillo ejemplo de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$, a la cual aplicamos en primer lugar el método de eliminación gaussiana e inmediatamente después lo traducimos en términos de producto de matrices.

La eliminación gaussiana aplicada a la matriz A realiza sólo la siguiente operación: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2.ª fila}-4(\text{1.ª fila})\to\text{2.ª fila}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = U$, operación elemental que se puede expresar mediante el producto de la matriz elemental $E_{12}(-4)$ por la matriz A:

$$E_{12}(-4)\cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{2.ª fila}-4(\text{1.ª fila})} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = U.$$

Pero lo que más interesa es escribir la factorización de A, es decir, «despejarla» de la igualdad $E_{12}(-4)\cdot A = U$. Esta tarea es muy sencilla y basta utilizar $E_{12}(4)$, la matriz inversa de $E_{12}(-4)$. Así pues, obtenemos la factorización LU de la matriz A, donde L es una matriz triangular inferior y U una matriz triangular o escalonada superior:

$$A = E_{12}(4)\cdot U = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{L \\ \text{triangular inferior}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\substack{U \\ \text{triangular superior}}}.$$

Todavía es posible conseguir descomponer en factores más «simples» la matriz U, exigiendo que la matriz triangular superior, al igual que L, contenga unos en la diagonal. Lo conseguimos con ayuda de las matrices diagonales:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} = LDU.$$

En este nuevo ejemplo, es necesario más de un paso en la eliminación gaussiana. Aplicamos a la matriz de coeficientes del sistema $Ax=b$: $\begin{cases} 2u+\ \ v+w=\ 1 \\ 4u+\ \ v\ \ \ \ \ =-2 \\ -2u+2v+w=\ 7 \end{cases}$ el método de eliminación gaussiana:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{(Hacer ceros debajo del} \\ \text{primer pivote, que es el 2)}}]{\substack{2.^{\text{a}}\text{ fila}-2(1.^{\text{a}}\text{ fila})\to 2.^{\text{a}}\text{ fila} \\ 3.^{\text{a}}\text{ fila}-(-1)(1.^{\text{a}}\text{ fila})\to 3.^{\text{a}}\text{ fila}}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{(Hacer ceros debajo del} \\ \text{segundo pivote, que es el } -1)}]{3.^{\text{a}}\text{ fila}-(-3)(2.^{\text{a}}\text{ fila})\to 3.^{\text{a}}\text{ fila}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}=U$$

Las tres operaciones matriciales que convierten la matriz A en U son:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{3.^{\text{a}}\text{ fila}-(-3)(2.^{\text{a}}\text{ fila}) \\ \to 3.^{\text{a}}\text{ fila}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{3.^{\text{a}}\text{ fila}-(-1)(1.^{\text{a}}\text{ fila}) \\ \to 3.^{\text{a}}\text{ fila}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{2.^{\text{a}}\text{ fila}-2(1.^{\text{a}}\text{ fila}) \\ \to 2.^{\text{a}}\text{ fila}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}_{U},$$

es decir, $E_{32}(3)\cdot E_{31}(1)\cdot E_{21}(-2)\cdot A=U$. En resumen, la matriz

$$M=E_{32}(3)\cdot E_{31}(1)\cdot E_{21}(-2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

al premultiplicar a la matriz A lleva hasta U. Y del mismo modo, $Ax=b$ se transforma en $MAx=Mb$, es decir, en $Ux=Mb$.

Como en el ejemplo anterior, la pregunta más importante es la opuesta: ¿cómo podemos deshacer los pasos de la eliminación gaussiana?, es decir, ¿cómo recuperamos A a partir de U?

Recordemos que cada una de las matrices elementales anteriores deshace su trabajo sumando en lugar de restando las filas indicadas. Estamos hablando de invertir las matrices elementales anteriores:

$$\left[E_{32}(3)\right]^{-1}=E_{32}(-3),\quad \left[E_{31}(1)\right]^{-1}=E_{31}(-1),\quad \left[E_{21}(-2)\right]^{-1}=E_{21}(2);$$

y, por tanto, $A=\underbrace{E_{21}(2)\cdot E_{31}(-1)\cdot E_{32}(-3)}_{L}\cdot U=LU$.

Observemos el sorprendente resultado de las entradas de la matriz $L=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{21}(2)}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{31}(-1)}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{32}(-3)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$: los factores de la eliminación se quedan en la posición que ocupaban en las matrices elementales. Aunque quizás no sea tan sorprendente el resultado si el lector se detiene a pensar en el efecto que cada matriz produce al premultiplicar a otra y el orden

en que se produce ese efecto.

La conclusión final es que la matriz A se escribe como el producto de las matrices triangulares $L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $U=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

En los dos ejemplos hemos llegado a escribir una matriz A como el producto de otras dos matrices: $A=LU$; y en ambos casos las matrices factores tienen características comunes que conviene que sean destacadas.

Por un lado, si observamos la matriz L, nos damos cuenta de que:

a. Es triangular inferior, con unos en la diagonal principal, y es inversible.
b. Sus entradas por debajo de la diagonal son los factores del algoritmo de la eliminación gaussiana; por tanto, el cálculo de L no requiere ningún esfuerzo adicional.

Por otro lado, al observar el proceso que lleva a la matriz U afirmamos que:

a. La matriz U es triangular o escalonada superior.
b. Las filas de U contienen los coeficientes que aparecen tras la eliminación.
c. El primer número no nulo de cada fila de U es un pivote de la eliminación.

En el siguiente ejercicio usamos la eliminación gaussiana para encontrar las factorizaciones LU y LDU de una matriz y, después, indicamos cómo aprovechar estas factorizaciones para resolver cualquier sistema lineal que tanga como matriz de coeficientes la ya factorizada.

Ejercicio 11: La eliminación gaussiana aplicada a la matriz $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ realiza los siguientes pasos:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{3.ª fila}-1(\text{1.ª fila})\to\text{3.ª fila}]{\text{2.ª fila}-2(\text{1.ª fila})\to\text{2.ª fila}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3.ª fila}-2(\text{2.ª fila})\to\text{3.ª fila}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}=U$$

lo cual significa que la factorización LU de la matriz B es

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}}_{U}=LU.$$

Y, en consecuencia, la factorización LDU de la matriz B es

$$B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 4 & -5 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{U}=LDU.$$

Ahora, nos proponemos resolver, por ejemplo, el sistema $\begin{cases}2u-3v \qquad =3\\ 4u-5v+w=7\\ 2u-v-3w=0\end{cases}$ cuya matriz de coeficientes es B. No es necesario volver a aplicar la eliminación gaussiana, tan solo tenemos que resolver dos sistemas triangulares. En efecto,

$$\begin{cases}2u-3v \qquad =3\\ 4u-5v+w=7\\ 2u-v-3w=0\end{cases} \Leftrightarrow B\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 7\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow LU\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 7\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\text{Primero resolver}: L\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 7\\ 0\end{pmatrix}\\ \\ \text{En segundo lugar resolver}: U\begin{pmatrix}u\\ v\\ \boldsymbol{w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}\end{cases}$$

Empezamos, pues, resolviendo el sistema lineal triangular inferior $L\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 7\\ 0\end{pmatrix}$, por sustitución progresiva:

$$L\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 7\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 7\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=3\\ \qquad y=1\\ \qquad\qquad z=-5\end{cases}.$$

Y, a continuación, resolvemos, por sustitución regresiva, el sistema lineal triangular superior $U\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}$. Así pues,

$$U\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\qquad\qquad u=\frac{3}{2}\\ \qquad v=0\\ w=1\end{cases}$$

Del ejemplo anterior podemos concluir que siempre que una matriz esté factorizada en la forma LU, el cálculo de las soluciones de los sistemas lineales que tienen como coeficientes dicha matriz se reduce a resolver dos sistemas triangulares.

Puede parecer, por los ejemplos resueltos, que las matrices que se pueden factorizar en la forma LU han de ser cuadradas y, además, regulares. En absoluto, ninguna de esas dos características es necesaria. Le ofrecemos al lector el siguiente ejemplo que no cumple ninguna de ellas:

Ejercicio 12: Obtengamos la factorización LU de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Después, indicaremos un conjunto de variables libres (parámetros) y otro de variables básicas para el sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$, ¿cuáles son las soluciones?

Aplicando la eliminación gaussiana a la matriz A se concluye que la factorización LU es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}.$$

Obsérvese que la matriz L, triangular inferior, es cuadrada e inversible, como ya dijimos, y ahora se observa que su orden es el del número de filas de A. Por el contrario, U mantiene el mismo tamaño que A.

El siguiente asunto es resolver el sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$, es decir, $LU\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Podemos abordar el problema de resolver $LU\mathbf{x}=\mathbf{0}$ como en un ejemplo anterior, es decir, $LU\mathbf{x}=\mathbf{0} \iff \begin{cases} \text{Primero resolver}: L\mathbf{v}=\mathbf{0} \\ \text{En segundo lugar resolver}: U\mathbf{x}=\mathbf{v} \end{cases}$ y, enseguida, observar que el sistema $L\mathbf{v}=\mathbf{0}$ tiene como solución $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, es decir, que el problema ha quedado reducido a resolver el sistema $U\mathbf{x}=\mathbf{0}$. O bien, razonar del siguiente modo: como L es una matriz inversible, entonces $LU\mathbf{x}=\mathbf{0} \iff U\mathbf{x}=L^{-1}\mathbf{0} \iff U\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

En definitiva, cualquiera de las dos maneras de razonar nos lleva a la necesidad de resolver el sistema $U\mathbf{x}=\mathbf{0}$ y eso es lo que nos proponemos hacer.

Tomamos como variables básicas las correspondientes a columnas con pivotes, es decir, x_1 y x_2; por tanto, las variables libres o parámetros son x_3 y x_4. De hecho, las soluciones del sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ son los vectores del espacio $\mathbf{R}^4$ que se expresan del modo siguiente: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_3-x_4 \\ -x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Factorización LU: eliminación gaussiana con intercambio de filas

La eliminación gaussiana puede necesitar cambiar el orden de las ecuaciones, eso sucede cuando el número al que le «tocaría» ser pivote es cero.

Por ejemplo, en el sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$: $\begin{cases} \quad\quad v+w=1 \\ u+v \quad\quad =2 \\ u \quad\quad +w=3 \end{cases}$ se presenta la dificultad de no poder usar ningún múltiplo de la primera fila para aniquilar el primer uno de la segunda fila.

Ya sabemos qué hacer: reordenar las ecuaciones (o las filas). Por ejemplo, intercambiamos la primera y la segunda filas, lo cual significa, en términos matriciales, premultiplicar por la matriz permutación $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Así pues, el sistema se convierte tras la reordenación en: $PA\mathbf{x}=P\mathbf{b}$, o bien, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y ahora se procede con la eliminación gaussiana sobre PA:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.^{\text{a}}\text{ fila}\leftrightarrow 1.^{\text{a}}\text{ fila}} PA=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.^{\text{a}}\text{ fila}-(1.^{\text{a}}\text{ fila})\to 3.^{\text{a}}\text{ fila}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3.^{\text{a}}\text{ fila}-(-1)(2.^{\text{a}}\text{ fila})\to 3.^{\text{a}}\text{ fila}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=U.$$

La correspondiente factorización es

$$PA=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{31}(1)\cdot E_{32}(-1)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=LU.$$

Veamos ahora cómo usar la factorización conseguida para resolver el sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$: $\begin{cases} \quad\quad v+w=1 \\ u+v \quad\quad =2 \\ u \quad\quad +w=3 \end{cases}$. Para empezar, la permutación de filas realizada

lo convierte en el sistema equivalente: $PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$, es decir, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, que de nuevo es equivalente a resolver los dos sistemas triangulares a los que conduce la factorización LU: $L(U\mathbf{x}) = P\mathbf{b}$, es decir,

$$PA\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow LU\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Primero resolver}: L\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \text{En segundo lugar resolver}: U\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} \end{cases}$$

En primer lugar, $L\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$, y, a continuación, $U\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 0 \\ w = 1 \end{cases}$.

Veamos otro ejemplo en el que la necesaria permutación de filas no es aparente desde el principio, sino que durante el proceso de eliminación gaussiana se observa esa necesidad. No importa; en ese caso, se realiza la eliminación gaussiana como siempre y después interpretamos los pasos realizados como si la permutación se hubiera hecho desde el principio.

Ejercicio 13: Realizando los cambios de fila que sean necesarios encontramos la factorización LU de la matriz de coeficientes del sistema $\begin{cases} u + 4v + 2w = -2 \\ -2u - 8v + 3w = 32 \\ v + w = 1 \end{cases}$ y, a continuación, lo resolvemos**.**

La eliminación gaussiana aplicada a la matriz de coeficientes necesita los siguientes pasos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{(Hacer ceros debajo del} \\ \text{primer pivote, que es 1)}}]{2.^{\text{a}}\text{ fila}-(-2)(1.^{\text{a}}\text{ fila})\to 2.^{\text{a}}\text{ fila}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(Permutar filas)}]{2.^{\text{a}}\text{ fila}\leftrightarrow 3.^{\text{a}}\text{ fila}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = U$$

Ha sido necesaria una permutación de filas. Si suponemos que se ha hecho desde el principio, es decir, si desde el principio construimos la matriz $PA = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Permutar la 2.ª y la 3.ª filas}}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -8 & 3 \end{pmatrix}$, entonces en el único paso

necesario de la eliminación gaussiana, consistente en hacer ceros debajo del primer pivote, debe cambiarse el papel de la segunda y tercera filas. Así pues, la factorización LU es

$$PA=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&1&1\\-2&-8&3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}}_{E_{31}(-2)}\begin{pmatrix}1&4&2\\0&1&1\\0&0&7\end{pmatrix}=LU.$$

Como ya viene siendo habitual, para resolver el sistema $\begin{cases}u+4v+2w=-2\\-2u-8v+3w=32\\v+w=1\end{cases}$ escribimos los dos sistemas triangulares a los que conduce la factorización $PA=LU$:

$$PA\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}-2\\32\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow LU\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\32\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{Primero, resolver } L\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\32\end{pmatrix}\\\text{En segundo lugar, resolver } U\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}\end{pmatrix}\end{cases}$$

La solución del primer sistema es $\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}}_{L}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\32\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=1\\c=28\end{cases}$

y, finalmente, $\underbrace{\begin{pmatrix}1&4&2\\0&1&1\\0&0&7\end{pmatrix}}_{U}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\28\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}u=2\\v=-3.\\w=4\end{cases}$

Una vez resueltos varios ejercicios de factorización LU de matrices cuadradas, el lector puede inducir que se verifica la siguiente propiedad.

Propiedad: Suponemos que A es una matriz cuadrada.

1. En el caso de A no singular (regular),
   — existe una matriz de permutación P que reordena las filas de A de tal modo que la matriz PA admite una factorización con *pivotes distintos de cero:* $PA=LU=LDU$;
   — además, $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ tiene solución única.
2. En el caso de A singular, ningún reordenamiento produce pivotes distintos de cero.

11.3. Matriz inversa. Método de Gauss-Jordan

La operación producto de matrices la hemos usado ampliamente tanto en la segunda como en la tercera sección de este tema. Todavía no hemos dedicado la atención que merece el hecho de que esta operación tiene elemento neutro, la matriz identidad, y que, por tanto, puede haber, y de hecho las hay, matrices que tienen inversa. Dedicamos esta sección al estudio de las matrices inversibles y, desde luego, al cálculo de la inversa.

Definición: Una matriz cuadrada A se dice *inversible* si existe otra matriz cuadrada B del mismo orden tal que: $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

Hay a lo sumo una matriz B con esas características; se denomina *inversa de* A *y se denota por* $B = A^{-1}$: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

¿Por qué afirmamos que cada matriz tiene a lo sumo una inversa? Sencillamente porque el producto de matrices verifica la propiedad asociativa y esta propiedad trae como consecuencia la unicidad de la inversa. Aún se consigue una propiedad más general: «si existen matrices B y C tales que $B \cdot A = I_n$ (B es inversa a izquierda de A) y $A \cdot C = I_n$ (C es inversa a derecha de A), entonces $B = C$». La asociatividad del producto de matrices: $B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C$ nos permite concluir que efectivamente $B = C$.

Propiedades:

1. Si la matriz A tiene inversa A^{-1}, entonces la inversa de A^{-1} es A, es decir, $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
2. *El producto* AB *de dos matrices inversibles es inversible;* además la inversa del producto es el producto, en orden contrario, de las inversas de los factores: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

   Para comprobar que $B^{-1} \cdot A^{-1}$ es la inversa de $A \cdot B$, vamos a multiplicarlas y a observar, tras usar la ley asociativa, que el resultado es la matriz identidad.

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AA^{-1} = I,$$
$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}B = I.$$

3. Si la matriz A es inversible, entonces el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Cálculo de inversas: método de Gauss-Jordan

Estamos en condiciones de calcular la inversa de cualquier matriz, *siempre y cuando exista.*

Para empezar es fácil reconocer las inversas de las matrices elementales y de hecho ya las habíamos calculado. Recordémoslas:

1. Si la matriz E suma a una fila de I un múltiplo de otra, su inversa E^{-1} lo resta.

   Por ejemplo, cuando $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ multiplica a izquierda a una matriz produce el efecto de sumar a su segunda fila el doble de la primera; por tanto, su inversa es $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ya que resta de la segunda fila el doble de la primera.

2. Si la matriz P intercambia dos filas, su inversa P^{-1} las vuelve a intercambiar; en este caso $P^{-1} = P$.

3. Si la matriz diagonal D tiene entradas d_1, d_2,…, d_n no nulas en la diagonal principal, entonces su inversa D^{-1} es también diagonal con valores $\frac{1}{d_1}$, $\frac{1}{d_2}$, …, $\frac{1}{d_n}$ en las entradas de la diagonal principal.

   Por ejemplo, la inversa de $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Ahora pasamos a calcular la inversa de una matriz A no tan sencilla como las elementales. ¿Qué podemos hacer? El problema es obtener una matriz A^{-1}, cuyas entradas denotamos mediante la letra x, con la propiedad $A \cdot A^{-1} = I$. Fijémonos en las columnas de la matriz inversa A^{-1}: hay que resolver n ecuaciones de la forma $A \cdot \mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$, donde $\mathbf{x}_j$ designa el vector de la columna j-ésima de A^{-1} y $\mathbf{e}_j$ es la j-ésima columna de I, es decir, una columna de ceros salvo un uno en el lugar j.

El método de Gauss-Jordan calcula A^{-1} considerando el producto $A \cdot A^{-1} = I$ columna a columna, como hemos descrito arriba. Como la matriz A de los coeficientes es la misma para todos los sistemas, podemos realizar

simultáneamente la eliminación para las n ecuaciones.

Por ejemplo, vamos a calcular la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Esto significa que debemos calcular las entradas de la matriz A^{-1} que cumple la ecuación:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En definitiva, hay que resolver los sistemas lineales:

$$A\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ A\mathbf{y}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ A\mathbf{z}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como hay que resolver tres sistemas lineales con los mismos coeficientes, hacemos el trabajo de forma unificada y comenzamos aplicando la eliminación gaussiana como siempre lo hemos hecho:

$$(A\ :\ \mathbf{e}_1\ \ \mathbf{e}_2\ \ \mathbf{e}_3)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(Hacer ceros debajo del primer pivote, que es el 2)}]{\substack{2.^{\text{a}}\text{ fila}-2(1.^{\text{a}}\text{ fila})\to 2.^{\text{a}}\text{ fila} \\ 3.^{\text{a}}\text{ fila}-(-1)(1.^{\text{a}}\text{ fila})\to 3.^{\text{a}}\text{ fila}}}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & : & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow[\text{(Hacer ceros debajo del segindo pivote, que es el }-1)]{3.^{\text{a}}\text{ fila}-(-3)(2.^{\text{a}}\text{ fila})\to 3.^{\text{a}}\text{ fila}}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & : & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto completa la eliminación gaussiana. Las tres primeras columnas de la última matriz forman la conocida matriz $U=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ triangular superior y las otras tres columnas forman la matriz L^{-1}:

$$L^{-1}=E_{32}(3)\cdot E_{31}(1)\cdot E_{21}(-2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

El método de Gauss-Jordan continúa produciendo ceros por encima de la diagonal de U hasta llegar a la matriz identidad.

Comenzamos, pues, creando ceros encima del pivote -4, para continuar creando ceros encima del pivote -1 y concluimos multiplicando cada fila por el inverso de los pivotes y así conseguir a la izquierda la matriz identidad:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(Hacer ceros encima del último pivote, que es } -4)]{\substack{2.^{\text{a}}\text{ fila}-\frac{1}{2}(3.^{\text{a}}\text{ fila})\to 2.^{\text{a}}\text{ fila} \\ 1.^{\text{a}}\text{ fila}+\frac{1}{4}(3.^{\text{a}}\text{ fila})\to 1.^{\text{a}}\text{ fila}}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[\text{(Hacer ceros encima del segundo pivote, que es -1)}]{1.^{\text{a}}\text{ fila}-(-1)(2.^{\text{a}}\text{ fila})\to 1.^{\text{a}}\text{ fila}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[\text{(Hacer unos en la diagonal)}]{\substack{\frac{1}{2}(1.^{\text{a}}\text{ fila})\to 1.^{\text{a}}\text{ fila} \\ (-1)(2.^{\text{a}}\text{ fila})\to 2.^{\text{a}}\text{ fila} \\ -\frac{1}{4}(3.^{\text{a}}\text{ fila})\to 3.^{\text{a}}\text{ fila}}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) = \left(I \quad : \quad A^{-1}\right)$$

Hemos llegado finalmente a simplificar los tres sistemas $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$ de tal forma que las soluciones de cada uno de ellos son las tres columnas de la derecha, es decir, las columnas de la matriz inversa.

Vamos a usar de nuevo el método de Gauss-Jordan para calcular las inversas de las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En la primera de ellas repetimos el algoritmo de Gauss-Jordan, en la segunda es aconsejable alguna permutación de filas y en la tercera el algoritmo falla pues la matriz no tiene inversa.

Ejercicio 14: Aplicamos el método de Gauss-Jordan a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(A \quad : \quad I_3\right) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(Hacer ceros debajo del primer pivote, que es 1)}]{2.^{\text{a}}\text{ fila}-(1.^{\text{a}}\text{ fila})\to 2.^{\text{a}}\text{ fila}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[\text{(Hacer ceros debajo del segundo pivote, que es 1)}]{3.^{\text{a}}\text{ fila}-(2.^{\text{a}}\text{ fila})\to 3.^{\text{a}}\text{ fila}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(Hacer uno en el tercer pivote)}]{\frac{1}{2}(3.^{\text{a}}\text{ fila})\to 3.^{\text{a}}\text{ fila}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[\text{(Hacer ceros encima del último pivote, que es 1)}]{\substack{2.^{\text{a}}\text{ fila}-(-1)(3.^{\text{a}}\text{ fila})\to 2.^{\text{a}}\text{ fila} \\ 1.^{\text{a}}\text{ fila}-(3.^{\text{a}}\text{ fila})\to 1.^{\text{a}}\text{ fila}}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = \left(I_3 \quad : \quad A^{-1}\right)$$

Observemos dos cosas: Primero, la matriz A tiene tres pivotes, no nulos, y, segundo, el proceso de Gauss-Jordan es en realidad una sucesión de operaciones elementales y, por tanto, se puede interpretar como un producto

de matrices elementales. En efecto,

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\substack{(1.^{\text{a}}\text{ fila}-3.^{\text{a}}\text{ fila}\to 1.^{\text{a}}\text{ fila})\\ E_{13}(-1)}}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\substack{(2.^{\text{a}}\text{ fila}+3.^{\text{a}}\text{ fila}\to 2.^{\text{a}}\text{ fila})\\ E_{23}(1)}}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}_{\substack{\left(\frac{1}{2}3.^{\text{a}}\text{ fila}\to 3.^{\text{a}}\text{ fila}\right)\\ D_3\left(\frac{1}{2}\right)}}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}}_{\substack{(3.^{\text{a}}\text{ fila}-2.^{\text{a}}\text{ fila}\to 3.^{\text{a}}\text{ fila})\\ E_{32}(-1)}}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\substack{(2.^{\text{a}}\text{ fila}-1.^{\text{a}}\text{ fila}\to 2.^{\text{a}}\text{ fila})\\ E_{21}(-1)}}}_{A^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{I_3}$$

Ejercicio 15: Para calcular la inversa de $B=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$ por el método de Gauss-Jordan conviene realizar algunas permutaciones de filas. Como ya hemos comprobado ello deja sin alterar las soluciones de los sistemas lineales y, por consiguiente, el método de Gauss-Jordan nos conduce a la inversa igual que en los ejemplos anteriores.

$$(B\ :\ I_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&-1&0&1&0&0\\-1&2&-1&0&1&0\\0&-1&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}(1.^{\text{a}}\text{ fila})\to 1.^{\text{a}}\text{ fila}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0&0\\-1&2&-1&0&1&0\\0&-1&2&0&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{2.^{\text{a}}\text{ fila}+1.^{\text{a}}\text{ fila}\to 2.^{\text{a}}\text{ fila}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{3}{2}&-1&\frac{1}{2}&1&0\\0&-1&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{2.^{\text{a}}\text{ fila}\leftrightarrow 3.^{\text{a}}\text{ fila}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&2&0&0&1\\0&\frac{3}{2}&-1&\frac{1}{2}&1&0\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{3.^{\text{a}}\text{ fila}+\frac{3}{2}(2.^{\text{a}}\text{ fila})\to 3.^{\text{a}}\text{ fila}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&2&0&0&1\\0&0&2&\frac{1}{2}&1&\frac{3}{2}\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{2.^{\text{a}}\text{ fila}-3.^{\text{a}}\text{ fila}\to 2.^{\text{a}}\text{ fila}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&0&-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&2&\frac{1}{2}&1&\frac{3}{2}\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{1.^{\text{a}}\text{ fila}-\frac{1}{2}(2.^{\text{a}}\text{ fila})\to 1.^{\text{a}}\text{ fila}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&-1&0&-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&2&\frac{1}{2}&1&\frac{3}{2}\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}(3.^{\text{a}}\text{ fila})\to 3.^{\text{a}}\text{ fila}]{(-1)(2.^{\text{a}}\text{ fila})\to 2.^{\text{a}}\text{ fila}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&1&0&\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\end{array}\right)=(I_3\ :\ B^{-1}).$$

Por un lado, esta matriz B inversible tiene tres pivotes, no nulos. Por otro lado, los pasos realizados para llegar a la matriz B^{-1} proporcionan su factorización en matrices elementales:

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}=$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}_{\substack{\begin{pmatrix}-2.^{a}\text{f}\to 2.^{a}\text{f}\\ \frac{1}{2}(3.^{a}\text{f})\to 3.^{a}\text{f}\end{pmatrix}\\ D}}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\substack{\left(1.^{a}\text{f}-\frac{1}{2}2.^{a}\text{f}\to 1.^{a}\text{f}\right)\\ E_{12}(-\frac{1}{2})}}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\substack{(2.^{a}\text{f}-3.^{a}\text{f}\to 2.^{a}\text{f})\\ E_{23}(-1)}}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}}_{\substack{\left(3.^{a}\text{f}+\frac{3}{2}2.^{a}\text{f}\to 3.^{a}\text{f}\right)\\ E_{32}(\frac{3}{2})}}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}}_{\substack{(2.^{a}\text{f}\leftrightarrow 3.^{a}\text{f})\\ P_{23}}}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\substack{(2.^{a}\text{f}+1.^{a}\text{f}\to 2.^{a}\text{f})\\ E_{21}(1)}}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\substack{\left(\frac{1}{2}1.^{a}\text{f}\to 1.^{a}\text{f}\right)\\ D_1(\frac{1}{2})}}$$

Ejercicio 16: La matriz $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ no tiene inversa. El método de Gauss-Jordan nos informa de este hecho, pues la tercera fila es una ecuación imposible en algunos casos:

$$(C \;:\; I_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{3.^{a}\text{fila}-2.^{a}\text{fila}\to 3.^{a}\text{fila}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right).$$

Conclusión: El método de Gauss-Jordan para calcular la inversa de una matriz A nos ha mostrado una característica, al menos curiosa, de las matrices inversibles y es que ese método reduce A a la identidad mediante tres tipos de matrices, las elementales, que son fácilmente inversibles:

$$\left(D_i \ldots E_{ij} \ldots P_{kl} \ldots E_{ij} \ldots\right)A=I.$$

El producto entre paréntesis tiene inversa, ya que la tiene cada uno de los factores. La ecuación significa que A es la inversa del producto, entre paréntesis, y que dicho producto es la inversa de A.

Criterio de invertibilidad: pivotes no nulos

Queremos saber qué matrices son inversibles y cuáles no. Esta pregunta es muy importante y tiene varias respuestas: determinante distinto de cero o valores propios distintos de cero o pivotes distintos de cero. Este último criterio es el que se desprende del método de Gauss-Jordan.

Criterio de invertibilidad: Para una matriz cuadrada A son hechos equivalentes:

1. A es inversible.
2. $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ tiene una única solución para todos los términos independientes $\mathbf{b}$.

3. El número de pivotes no nulos de A es precisamente el orden de A, es decir, A es una matriz regular.

Demostración:

1. $\Rightarrow$2. Si A es inversible, entonces la única solución del sistema lineal $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ es $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$, para cualquier $\mathbf{b}$.

2. $\Rightarrow$3. Si A fuera singular, observemos que al usar la eliminación gaussiana en $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ obtendríamos una columna con ceros debajo del pivote nulo, es decir, no podremos resolver $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ para toda $\mathbf{b}$.

3. $\Rightarrow$1. Una matriz A no singular, con pivotes distintos de cero, permite aplicarle el método de Gauss-Jordan y reducir A a la identidad. Es decir, se consigue calcular A^{-1}. $\square$

Finalizamos esta sección calculando algunas inversas más.

Ejercicio 17: Calculamos la inversa de $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y la de $B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{pmatrix}$.

1. La inversa de $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ es, como ya sabemos: $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2. La segunda matriz $B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{pmatrix}$ es el resultado de aplicar a la matriz diagonal $D=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ dos permutaciones: la de las filas primera y cuarta y la de las filas segunda y tercera, $B=P_{23}\,P_{14}\,D$.

   Por tanto, $B^{-1}=D^{-1}\,P_{14}^{-1}\,P_{23}^{-1}=D^{-1}\,P_{14}\,P_{23}$, es decir, B^{-1} se obtiene realizando las mismas permutaciones, ahora a las columnas, de $D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

Así pues, $B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 18: Ahora nos ocupamos de calcular las inversas de las matrices triangulares $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Para obtener la inversa de $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$, usamos el método de Gauss-Jordan, y así:

$$(C \quad : \quad I_4)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{2.^a\text{ fila}+\frac{1}{2}(1.^a\text{ fila})\rightarrow 2.^a\text{ fila} \\ 3.^a\text{ fila}+\frac{2}{3}(2.^a\text{ fila})\rightarrow 3.^a\text{ fila} \\ 4.^a\text{ fila}+\frac{3}{4}(3.^a\text{ fila})\rightarrow 4.^a\text{ fila}}]{}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}=(I_4 \quad : \quad C^{-1}).$$

Las operaciones elementales realizadas conducen a la factorización

$$C^{-1}=E_{43}\left(\tfrac{3}{4}\right)\cdot E_{32}\left(\tfrac{2}{3}\right)\cdot E_{21}\left(\tfrac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix};$$

y, en consecuencia,

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}=\left[E_{43}\left(\tfrac{3}{4}\right)\cdot E_{32}\left(\tfrac{2}{3}\right)\cdot E_{21}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^{-1}=E_{21}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot E_{32}\left(-\tfrac{2}{3}\right)\cdot E_{43}\left(-\tfrac{3}{4}\right).$$

2. De nuevo aplicamos el método de Gauss-Jordan para calcular la inversa de la otra matriz triangular $D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Así pues,

$$(D \ : \ I_4)=\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{1.^a \text{ fila}+2.^a \text{ fila} \to 1.^a \text{ fila}}]{\substack{3.^a \text{ fila}+4.^a \text{ fila} \to 3.^a \text{ fila} \\ 2.^a \text{ fila}+3.^a \text{ fila} \to 2.^a \text{ fila}}} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\left(I_4 \ : \ D^{-1}\right).$$

De nuevo, escribimos las factorizaciones de D^{-1} y de D como producto de matrices elementales:

$$D^{-1}=E_{12}(1)\cdot E_{23}(1)\cdot E_{34}(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\left[E_{12}(1)\cdot E_{23}(1)\cdot E_{34}(1)\right]^{-1}=E_{34}(-1)\cdot E_{23}(-1)\cdot E_{12}(-1).$$

Nótese que la inversa de una matriz triangular superior también es triangular superior e igualmente sucede con las triangulares inferiores.

Ejercicio 19: Sabiendo que la inversa de $F=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es $F^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, siempre que $ad-bc\neq 0$, averigua cuál es la inversa de $G=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$.

La inversa de la matriz G se calcula muy fácilmente si la escribimos en la forma: $G=\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$, donde F y 0 indican respectivamente la matriz del enunciado y la matriz nula 2×2. Se tiene

$$G^{-1}=\begin{pmatrix} F^{-1} & 0 \\ 0 & F^{-1} \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b & 0 & 0 \\ -c & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & -b \\ 0 & 0 & -c & a \end{pmatrix}.$$

11.4. Matriz traspuesta. Matrices simétricas y matrices antisimétricas

En esta última sección construimos la matriz traspuesta de una matriz dada; esta construcción es, a diferencia del cálculo de la inversa, muy sencilla. Como curiosidad, la necesidad de trasponer una matriz surge en la teoría de la dualidad como matriz asociada a la aplicación dual.

Traspuesta de una matriz. Propiedades

Definición: Se llama traspuesta de A y se denota A^t a la matriz cuyas columnas son las filas de A, es decir, la fila i-ésima de A se transforma en la columna i-ésima de A^t.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Observaciones:

1. También las filas de A^t son las columnas de A.
2. Si A es una matriz cuadrada, A^t es el resultado de aplicar una simetría a la matriz A respecto a su diagonal principal.
3. Si miramos las matrices elemento a elemento: $\left(A^t\right)_{ij} = a_{ji}$.
4. La traspuesta de una matriz triangular inferior es una matriz triangular superior.
5. La traspuesta de una matriz diagonal es ella misma.

Propiedades respecto a las operaciones con matrices:

1. *La traspuesta de una suma de matrices es igual a la suma de las traspuestas de cada sumando:*
$$(A+B)^t = A^t + B^t,$$
siendo A y B dos matrices del mismo tamaño.
La comprobación de esta propiedad es inmediata. □

2. *La traspuesta de un producto de matrices es igual al producto, en orden inverso, de las traspuestas de los factores:*
$$(AB)^t = B^t A^t,$$
siendo A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$.

La comprobación de esta propiedad consiste en jugar pacientemente con el modo de multiplicar matrices. Así, la fila i-ésima de $(AB)^t$ es la columna i-ésima de AB, resultado de multiplicar cada fila de A por la columna i-ésima de B; es decir, resultado de multiplicar la fila i-ésima de B^t por cada columna de A^t, que es precisamente la fila i-ésima de $B^t A^t$. □

3. *La inversión y la trasposición de matrices son permutables*. Es decir, si la matriz cuadrada A es inversible, entonces también es inversible A^t y además

$$\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t.$$

La demostración de esta propiedad consiste en aplicar la propiedad 2 anterior. Así, para comprobar que la inversa de A^t es $\left(A^{-1}\right)^t$ basta multiplicar, en los dos órdenes, ambas matrices y observar que el resultado es la matriz identidad. En efecto,

$$A^t\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^{-1}A\right)^t = (I_n)^t = I_n,$$

$$\left(A^{-1}\right)^t A^t = \left(AA^{-1}\right)^t = (I_n)^t = I_n. \quad \square$$

La propiedad 2 sobre la traspuesta de un producto de matrices conduce a una sencilla conclusión sobre la factorización LDU y dice así: Conocida la factorización $A = LDU$, con unos en la diagonal de las matrices triangulares L y U, al aplicar la propiedad 2 anterior a $A = LDU$ se deduce que $A^t = (LDU)^t = U^t D^t L^t$, donde las matrices U^t y L^t son triangulares inferior y superior, respectivamente, y $D^t = D$. Es decir, la factorización de A^t es $A^t = U^t D L^t$.

Es pues consecuencia de lo anterior que los pivotes de A^t son los mismos que los de A.

Matrices simétricas. Matrices antisimétricas

Ahora introducimos una clase especial de matrices, quizás las más importantes de todas, pues aparecen en aquellos asuntos que están regidos por leyes justas: «cada acción tiene igual reacción».

Definición: Se dice que una matriz real es *simétrica* cuando coincide con su traspuesta: $A = A^t$. Es decir, al cambiar las filas por las columnas la matriz queda inalterada.

Una matriz A que sea simétrica debe ser necesariamente cuadrada, digamos de orden n, y los elementos a_{ij} y a_{ji} son iguales para cualesquiera índices i y j. En definitiva, la matriz simétrica A es una matriz cuadrada tal que los elementos situados simétricamente respecto a la diagonal principal son iguales (cada entrada a un lado de la diagonal principal es igual a su «reflejo» en el otro lado).

Cuando se trabaja en el cuerpo de los números complejos, el lugar de las matrices simétricas es ocupado por las *matrices hermíticas:* $\overline{A}^t = A$, la traspuesta de la conjugada coincide con la matriz original.

Propiedad: Aunque una matriz simétrica no es necesariamente inversible, se verifica que *si la matriz A tiene inversa, entonces A^{-1} es simétrica siempre y cuando A lo sea.*

Demostración: Es consecuencia de la propiedad 3, sobre la inversa de la traspuesta: $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$, ya que cuando A es una matriz simétrica se convierte en: $A^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$, lo cual significa que A^{-1} también es simétrica.

Definición: Una matriz real es *antisimétrica* (o *hemisimétrica*) cuando coincide con la opuesta de su traspuesta: $A = -A^t$.

De nuevo una matriz antisimétrica A es una matriz cuadrada, pero ahora los elementos situados simétricamente respecto a la diagonal principal son opuestos y los elementos de la diagonal principal son nulos.

En el resto de la sección nos proponemos dos objetivos. Por un lado, observar las matrices AA^t y A^tA, cuyas propiedades elementales podemos deducir ya; y, por otro lado, descubrir las especiales características de la factorización LDU de una matriz simétrica.

Empezamos estudiando las matrices AA^t y A^tA.

Propiedad: Independientemente de si A es una matriz cuadrada o no, las matrices AA^t y A^tA son simétricas.

Demostración: Basta calcular las traspuestas de AA^t y A^tA y aplicar la propiedad de la traspuesta de un producto de matrices para concluir que efectivamente son simétricas.

Nótese que si la matriz A es de tamaño $m \times n$, entonces AA^t es una matriz cuadrada de orden m y, en cambio, $A^t A$ es una matriz cuadrada de orden n.

Suponiendo que A es una matriz cuadrada, no siempre es cierto que $AA^t = A^t A$. De hecho, las matrices que verifican dicha igualdad tienen un nombre propio, se denominan *matrices normales.*

Ejercicio 20:

1. Hay matrices que no son normales, como por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   En efecto, $AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$

   y, sin embargo, $A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$.
2. Todas las matrices simétricas y todas las matrices antisimétricas son normales.
3. Hay matrices normales que no son ni simétricas ni antisimétricas. Por ejemplo, la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ no es simétrica ni antisimétrica (cuando $a \neq 0$), pero es normal.

   En efecto, $BB^t = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$ coincide con $B^t B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$.

Por último, enunciamos que la factorización LDU de una matriz simétrica tiene alguna característica destacable y la observaremos en un par de ejemplos.

Propiedad: Al usar la eliminación gaussiana sobre una matriz simétrica A, se obtiene una factorización $LDU = LDL^t$, es decir, la matriz U triangular superior es precisamente la traspuesta de L.

Ejercicio 21: Calculamos la factorización LDU de las matrices simétricas: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$. Además de verificar el resultado enunciado en la propiedad anterior, observaremos que la primera matriz es diferente en «algo» de la segunda.

1. Usando la eliminación gaussiana, se llega a que la factorización LU de la matriz simétrica A es: $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}_{U}=LU.$

   o bien, la factorización LDU: $A=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}}_{L}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}}_{U=L^t}=LDL^t.$

   Se comprueba que las matrices triangulares L y U son traspuestas entre sí y además se observa que los pivotes (que están en la matriz diagonal D) son todos positivos. Esta característica adicional conduce a la llamada *descomposición de Cholesky* de A:

$$A=\left(L\sqrt{D}\right)\left(L\sqrt{D}\right)^t,$$

   es decir, producto de una matriz triangular inferior $L\sqrt{D}$ por su traspuesta. En concreto,

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\1&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}_{L\sqrt{D}}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}_{\left(L\sqrt{D}\right)^t}=\left(L\sqrt{D}\right)\left(L\sqrt{D}\right)^t$$

2. De igual modo, conseguimos la factorización LU de la matriz simétrica B:

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&4&4\\1&4&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3&3\\0&0&-12\end{pmatrix}=LU,$$

   o bien, la factorización LDU:

$$B=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}}_{L}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-12\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}_{U=L^t}=LDL^t.$$

   Como era de esperar, las matrices triangulares L y U son traspuestas entre sí. Pero a diferencia del ejemplo anterior los pivotes (que están en la matriz diagonal D) no son todos positivos, lo cual impide escribir la descomposición de Cholesky.

Observación: Si los pivotes de la matriz simétrica A son positivos (este tipo de matrices se denominan definidas positivas), entonces $A=\left(L\sqrt{D}\right)\left(L\sqrt{D}\right)^t$ producto de una matriz triangular inferior $L\sqrt{D}$ por su traspuesta. Esta

factorización ya hemos dicho que recibe el nombre de «descomposición de Cholesky».

11.5. Comentarios finales

Este tema ha estado dedicado a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de coeficientes reales. En caso de que el sistema lineal tuviera coeficientes *complejos,* su resolución se puede reducir a la del sistema lineal de coeficientes reales que resulta de identificar las partes reales de los dos miembros de las ecuaciones y también las partes imaginarias. Así, resolver el sistema complejo $(M+iN)(x+iy)=c+di$ es equivalente a resolver el sistema lineal real $\begin{cases} M\,x-N\,y=c \\ N\,x+M\,y=d \end{cases}$, o bien, $\begin{pmatrix} M & -N \\ N & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

En las siguientes líneas resumimos cuáles son los métodos de resolución de sistemas lineales, dedicando especial atención a los métodos gaussianos.

Los métodos de resolución de sistemas lineales se clasifican en *métodos directos* y *métodos iterativos.* Los métodos directos, como los que hemos manejado en este tema, permiten obtener la solución del sistema después de un número finito de pasos; mientras que los métodos iterativos obtienen aproximaciones sucesivas de la solución del sistema.

La resolución directa o los métodos directos de resolución de un sistema lineal se basan en la transformación del sistema original en otro equivalente cuyas soluciones se obtengan de forma sencilla. Es pues necesario, en primer lugar, observar que ciertos sistemas lineales son extraordinariamente fáciles de resolver. Entre estos tipos destacan aquellos cuya matriz de coeficientes es triangular o aquellos en que es ortogonal.

Recordemos la metodología de nuestro trabajo en este tema. Empezamos observando que si el sistema $Ax=b$ es triangular superior el método de resolución es el conocido como sustitución hacia atrás o regresiva y que, análogamente, puede hacerse sustitución hacia delante o progresiva para los sistemas triangulares inferiores. Para otro tipos de matrices más generales se han desarrollado los métodos gaussianos, que son los métodos clásicos de reducción de sistemas a forma triangular. Están basados en la anulación de los elementos bajo la diagonal principal de la matriz de coeficientes, mediante combinaciones lineales elementales de las ecuaciones. En todos ellos se observan dos fases:

1. En la primera se produce la eliminación gaussiana de todos los elementos subdiagonales: el método de Gauss trabaja con la matriz de coeficientes y con el vector de términos independientes; y los métodos de factorización (LU y de Cholesky, de Doolitle y de Crout) expresan la matriz de coeficientes del sistema lineal como producto de una matriz triangular inferior y una matriz triangular superior.
2. En la segunda fase hay que resolver un sistema triangular superior, en el método de Gauss, o dos sistemas triangulares, en los métodos de factorización mencionados.

No podemos dejar de mencionar el *método de Cramer* de resolución de sistemas lineales. Recordemos que si $Ax = b$ es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas y con $\det A \neq 0$, entonces la solución del sistema puede obtenerse mediante la fórmula $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$, $i = 1, \ldots, n$, donde A_i es la matriz obtenida a partir de A sustituyendo la columna i-ésima por el vector b. Ahora bien, el método de Cramer tiene un grave inconveniente: la gran cantidad de operaciones necesarias. De hecho, este método no resiste la comparación, en términos de tiempo, con los métodos que hemos mencionado antes y, en la práctica, tan solo se usa para sistemas 2×2 y 3×3.

Finalmente, los métodos iterativos de resolución de sistemas lineales consisten en calcular una sucesión de vectores que converjan a la solución del sistema de partida. La forma de construir esos vectores da lugar a diferentes métodos como el método de Jacobi o el de Gauss-Seidel, entre otros. El estudio y desarrollo de esos métodos iterativos no es objetivo de este curso; ahora bien, le indicamos al lector interesado que puede conseguir información sobre los mismos en los textos de Cálculo Numérico.