

Tema 12.

Espacios vectoriales y sistemas lineales

En la primera parte de este tema abordamos el estudio de la estructura matemática en la que se sustenta todo el Álgebra lineal: los espacios vectoriales. Quizás el lector se sienta abrumado en cuanto haya leído estructura «matemática» porque teme las abstracciones matemáticas. No debe sentirse temeroso de nada, pues le aseguramos que no hay ideas difíciles ni propiedades complicadas. Todavía se sentirá más tranquilo conforme vaya observando que reconoce todo, absolutamente todo, lo que se vaya mencionando en este tema como algo muy familiar, pues los vectores geométricos son la fuente de inspiración de lo que es un espacio vectorial general. Ahora bien, hay otros espacios vectoriales con los que debemos trabajar, y así lo haremos, cuyos elementos son objetos muy variados, por ejemplo, las n -tuplas de números reales, las matrices, los polinomios, ciertas funciones, etc.

La última parte del tema está dedicada a completar nuestro conocimiento de los sistemas lineales. En el tema anterior sólo hemos respondido a una pregunta sobre los sistemas lineales: ¿cómo resolverlos?; y hemos dejado en el aire, aunque tal vez las hayamos intuido, preguntas tan importantes como éstas: ¿tienen las soluciones de un sistema lineal alguna estructura, alguna característica de interés?, ¿cuál es la razón por la que un sistema lineal tiene soluciones y otro no?, etc. Las respuestas las tenemos en este tema.

12.1. Espacios y subespacios vectoriales

Espacios vectoriales reales

Seguro que el lector ha manejado los espacios vectoriales en situaciones bien diferentes, aunque quizás no supiera que los conjuntos que estaba utilizando eran merecedores de tal apelativo. Primero, le vamos a recordar los ejemplos de espacio vectorial que creemos que ya ha usado, dejando para después la definición del concepto.

Los conjuntos que nombramos a continuación poseen características comunes a pesar de que sus elementos son bien distintos entre sí.

Ejemplos:

1. Los vectores del plano \mathbf{R}^2 o los del espacio \mathbf{R}^3 , que son pares o ternas de números reales, se suman y se multiplican por un escalar real, como muy bien sabemos, componente a componente.
2. En el conjunto de las matrices del mismo tamaño $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{R})$ también se suman y se multiplican por un escalar, como lo hemos hecho en el tema anterior.
3. El conjunto de las funciones reales de una variable real definidas en un intervalo fijo $[a, b]$ también se suman: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y se multiplican por escalares: $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.
4. Los polinomios con coeficientes reales se suman, como es habitual, sumando los monomios del mismo grado y se multiplican por un escalar multiplicando cada monomio por ese escalar.

En todos ellos están definidas dos operaciones: una, denominada suma, que combina dos elementos del conjunto para producir otro, y otra, denominada producto por un escalar, que asigna a cada elemento del conjunto y cada escalar (número real) otro elemento del conjunto. Estas operaciones verifican las mismas propiedades independientemente del espacio. Una vez que se ha conseguido entresacar las fundamentales, éstas son las que se usan para definir el concepto de espacio vectorial que nos ocupa en este apartado.

Definición: Supongamos que en el conjunto V se dispone de dos operaciones, llamadas suma y multiplicación por un escalar.

- a. La suma es una regla que asocia a dos elementos \mathbf{u} y \mathbf{v} del conjunto V otro elemento de V , llamado *suma de \mathbf{u} y \mathbf{v}* y que escribimos $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.
- b. La multiplicación por un escalar es una operación que asocia a cada escalar t (número real) y cualquier elemento \mathbf{u} del conjunto V otro de V , llamado *múltiplo escalar de \mathbf{u} por t* y que escribimos $t\mathbf{u}$.

El conjunto V se denomina *espacio vectorial* real si las dos operaciones verifican las ocho propiedades siguientes, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y $\forall s, t \in \mathbf{R}$:

- (S1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (propiedad *conmutativa*)
- (S2) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ (propiedad *asociativa*)
- (S3) Existe un único elemento $\mathbf{0} \in V$, llamado *cero de V* , que verifica:
 $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in V$.
- (S4) Para cada $\mathbf{u} \in V$ existe un único elemento $-\mathbf{u} \in V$, llamado *opuesto de \mathbf{u}* , que verifica: $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

- (P1) $s(t\mathbf{v}) = (st)\mathbf{v}$
- (P2) $t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ (propiedad *distributiva*)
- (P3) $(s + t)\mathbf{v} = s\mathbf{v} + t\mathbf{v}$ (propiedad *distributiva*)
- (P4) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

En ocasiones el espacio vectorial se escribe en la forma $(V, +, \cdot_{\mathbf{R}})$ para poner de manifiesto las dos operaciones definidas en V . Los elementos de un espacio vectorial se llaman *vectores*.

Es fácil reconocer que los vectores geométricos, las matrices, las funciones y los polinomios forman espacios vectoriales con las operaciones que ya hemos mencionado.

En la definición de espacio vectorial aparecen ocho reglas o propiedades de las dos operaciones. Ya hemos dicho que tan solo se debía escribir las fundamentales y así lo hemos hecho. Pero ¿qué significa que sean fundamentales?, queremos sencillamente expresar que todas las demás propiedades se pueden deducir de ellas y que en ese sentido ni falta ni sobra ninguna.

También queremos avisarle al lector de que no nos vamos a entretener en ir deduciendo una a una las restantes propiedades de las operaciones vectoriales. Creemos que su experiencia en el manejo de los vectores geométricos le proporciona toda la información necesaria a ese respecto. Como ejercicio, le proponemos al lector que trate de demostrar, a partir de las propiedades fundamentales, la veracidad de las siguientes consecuencias.

Consecuencias: Sea V un espacio vectorial, $\mathbf{u} \in V$ y $t \in \mathbf{R}$.

1. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$;
2. $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$;
3. si $t\mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces $t = 0$ o $\mathbf{u} = \mathbf{0}$;
4. $(-t)\mathbf{u} = -(t\mathbf{u})$.

Subespacios

Los espacios vectoriales que más necesitamos están dentro del espacio vectorial \mathbf{R}^n . Por ejemplo, si en el espacio tridimensional \mathbf{R}^3 elegimos cualquier plano que pasa por el origen, este plano es un espacio vectorial; de igual modo cualquier recta que pasa por el origen también es un espacio vectorial.

Definición: Un subconjunto W del espacio vectorial V se llama *subespacio* de V si W es por sí mismo un espacio vectorial con las operaciones suma y multiplicación por escalar heredadas de V .

Criterio para un subespacio: Un subconjunto no vacío W del espacio vectorial V es un subespacio si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes

- i. si w_1 y w_2 están en W , entonces $w_1 + w_2$ está en W ;
- ii. si t es cualquier escalar y w está en W , entonces tw está en W .

No hace falta comprobar ninguna de las propiedades de la definición de espacio vectorial porque al ser ciertas en V también lo son en W .

Hay dos subespacios de un espacio vectorial dado V que son extremos, en el sentido de que uno es el más pequeño posible y el otro es el mayor. Se trata de los subespacios $\{0\}$ y V .

La noción de subespacio vectorial la ilustramos con diferentes ejemplos de subconjuntos de un espacio vectorial que son subespacios y otros que no lo son. Aprovechamos para mostrar que la unión de subespacios no tiene que ser necesariamente subespacio vectorial.

Ejemplos: Dejamos al lector la comprobación de parte de las afirmaciones que se hacen a continuación.

1. Toda *recta* que pasa por el origen en \mathbf{R}^3 (o \mathbf{R}^2) es un subespacio de \mathbf{R}^3 (o \mathbf{R}^2). Así, por ejemplo, la recta del plano de ecuación $ax + by + c = 0$ es un subespacio si y sólo si pasa por el origen, es decir, $c = 0$.

Desde luego si $c \neq 0$, la recta $ax + by + c = 0$ no contiene al vector nulo. Eso significa que no cumple la propiedad S3, luego no es un subespacio vectorial.

Si, por el contrario, $c = 0$, entonces la recta está formada por los puntos (x, y) tales que $ax + by = 0$, que ahora sí verifican que la suma de dos de ellos sigue estando en la recta y lo mismo al ser multiplicados por un escalar.

- En efecto,
- a. $\begin{cases} (x_1, y_1) \text{ verifica } ax_1 + by_1 = 0 \\ (x_2, y_2) \text{ verifica } ax_2 + by_2 = 0 \end{cases}$, entonces $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

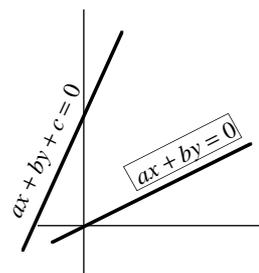


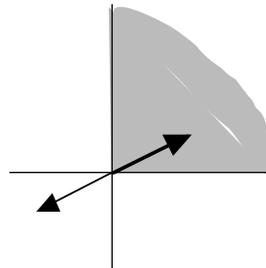
FIGURA 1: Una recta que es subespacio y otra que no lo es.

verifica, sumando las dos igualdades anteriores, $(ax_1+by_1)+(ax_2+by_2)=0$, es decir, $a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)=0$; en consecuencia, (x_1+x_2, y_1+y_2) también está en la recta.

b. Si (x,y) está en la recta de ecuación $ax+by=0$, también lo está cualquier múltiplo escalar $k(x,y)$. Basta multiplicar la igualdad $ax+by=0$ por k para decidir que el punto (kx,ky) también está en la recta.

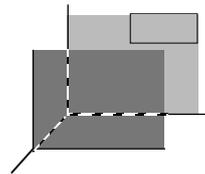
2. Si \mathbf{v} es un vector fijo del espacio vectorial V , entonces el conjunto $W = \{t\mathbf{v} : t \in \mathbf{R}\}$ formado, como se ve, por todos los múltiplos escalares de \mathbf{v} es un subespacio de V . Utilizando el lenguaje geométrico, W es la recta que pasa por el origen y tiene la dirección del vector \mathbf{v} .
3. La unión de las rectas $y=x$ e $y=0$, que son subespacios de \mathbf{R}^2 , no es un subespacio de \mathbf{R}^2 .
4. Los vectores del plano cuyas componentes sean positivas o cero (primer cuadrante) es un subconjunto pero no es un subespacio de \mathbf{R}^2 .

Para decidir que el primer cuadrante del plano no es un subespacio vectorial basta que observemos que los múltiplos escalares con coeficiente negativo de un vector cualquiera del primer cuadrante se sale de ese cuadrante, pues pasan a estar en el tercer cuadrante.



5. Del mismo modo que las rectas, todo *plano* que pasa por el origen en \mathbf{R}^3 es un subespacio de \mathbf{R}^3 .

Por ejemplo, el plano de vectores con primera componente nula, $x=0$, es un subespacio de \mathbf{R}^3 ; en cambio, no lo es el plano de vectores con primera componente igual a uno, $x=1$.



6. El conjunto de todas las funciones continuas $\mathcal{C}([a,b])$ es un subespacio del espacio de las funciones reales definidas en $[a,b]$.

7. El conjunto \mathcal{D}_n de todas las matrices diagonales de tamaño n es un subespacio de las matrices cuadradas $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{R})$.

No hay ninguna duda de que la suma de dos matrices diagonales sigue siendo diagonal y que al multiplicar una matriz diagonal por un escalar el resultado es también una matriz diagonal.

8. El conjunto las matrices simétricas también es un subespacio de las matrices cuadradas $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbf{R})$.

12.2. Sistemas generadores e independencia lineal. Bases

Sistemas generadores

Los subespacios vectoriales se pueden describir de dos formas distintas: o bien indicando las condiciones o características que han de cumplir los vectores que lo forman, por ejemplo cuando decimos los vectores del espacio con primera componente nula, $x=0$, o bien construyendo cada uno de sus vectores como combinación de otros, como el ejemplo 2 anterior en el que a partir de un vector fijo \mathbf{v} del espacio vectorial V , construimos el subespacio $W = \{t\mathbf{v} : t \in \mathbf{R}\}$ de todos los múltiplos escalares de \mathbf{v} .

Esta última técnica es la que vamos a desarrollar en las siguientes líneas.

Definición: Si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ son vectores del espacio vectorial V y t_1, \dots, t_k son escalares, entonces el vector cuya expresión es

$$t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_k\mathbf{v}_k$$

se llama *combinación lineal* de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ y los números t_1, \dots, t_k son los *coeficientes* de la combinación lineal.

Propiedad: Sean $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vectores del espacio vectorial V , entonces el conjunto W de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ es un subespacio de V .

Dicho subespacio W se llama *subespacio lineal generado por* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, y se escribe $\mathbf{R}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$. O bien, si el protagonismo lo tiene el sistema de vectores, diremos que la familia $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ es un *sistema generador* del subespacio W .

Ejercicio 1:

- El conjunto de vectores de \mathbf{R}^3 que son combinación lineal de $\mathbf{u}=(1,1,0)$ y $\mathbf{v}=(2,0,1)$ es el espacio vectorial W formado por los vectores:

$$t\mathbf{u} + s\mathbf{v} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+2s \\ t \\ s \end{pmatrix},$$

donde $t, s \in \mathbf{R}$.

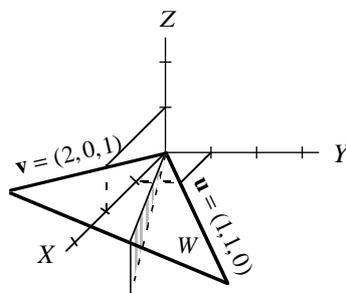


FIGURA 4: El plano W generado por \mathbf{u} y \mathbf{v} .

- ¿Está el polinomio $r(x) = -1 + x^2$ en el subespacio generado por $p(x) = 1 + x + x^3$ y $q(x) = -x - x^2 - x^3$? Si, ya que

$$r(x) = -1 + x^2 = -(1 + x + x^3) - (-x - x^2 - x^3) = -p(x) - q(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

- En el espacio vectorial de las funciones reales consideramos las funciones $f_1(x) = e^x \cos x$ y $f_2(x) = e^x \sin x$, y comprobamos que las derivadas de ambas funciones están en el subespacio generado por f_1 y f_2 .

En efecto,

$$- f_1'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = f_1(x) - f_2(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}, \text{ es decir, } f_1' = f_1 - f_2 \text{ y}$$

$$- f_2'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = f_1(x) + f_2(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}, \text{ es decir, } f_2' = f_1 + f_2.$$

- Este ejemplo además de sencillo es muy interesante. Describir geoméricamente el subespacio generado por los vectores de las filas y el subespacio generado por las columnas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

El subespacio generado por las filas $\mathbf{f}_1 = (1, 2)$ y $\mathbf{f}_2 = (3, 6)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales $s\mathbf{f}_1 + t\mathbf{f}_2 = s(1, 2) + t(3, 6)$, que, por cierto, puede escribirse:

$$s\mathbf{f}_1 + t\mathbf{f}_2 = s(1, 2) + t(3, 6) = s(1, 2) + t(3(1, 2)) = (s + 3t)(1, 2) = k(1, 2) = k\mathbf{f}_1.$$

En definitiva, el sistema generador $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ puede reducirse a un solo vector, por ejemplo, el primero. Geométricamente, ese subespacio es una recta, que pasa por el origen y de dirección $\mathbf{f}_1 = (1, 2)$.

Decidir cuál es el subespacio generado por las columnas es una tarea que dejamos al lector.

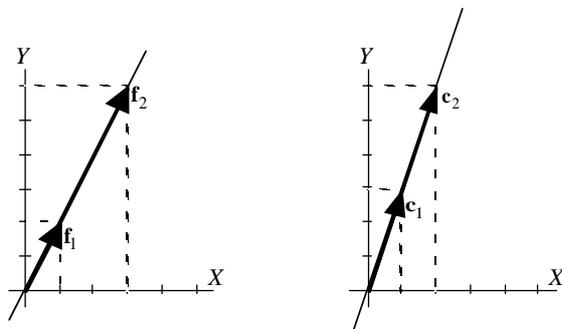


FIGURA 5: El subespacio generado por las filas de A , a la izquierda, y el generado por sus columnas, a la derecha.

Es fácil comprobar que $\mathbf{R}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ es el *subespacio más pequeño* de V que contiene a $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$. En consecuencia, para responder a la pregunta ¿cuál es el menor subespacio del espacio de las matrices cuadradas de orden 3 que contiene todas las matrices simétricas y todas las triangulares inferiores?, basta que construyamos todas las combinaciones lineales de las matrices de esos tipos. Como todas las matrices cuadradas de orden 3 pueden expresarse como la suma de una matriz simétrica y de una triangular inferior:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ b & 0 & f \\ c & f & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Simétrica}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d-b & e & 0 \\ g-c & h-f & i \end{pmatrix}}_{\text{Triangular inferior}}$$

la conclusión es que el subespacio por el que se pregunta es todo el espacio de las matrices cuadradas de orden tres. Si ahora nos preguntamos ¿cuál es el mayor subespacio contenido en ambos? la respuesta depende tan solo de averiguar cómo debe ser una matriz que sea a la vez simétrica y triangular inferior, la única posibilidad es que sean nulas las entradas por encima de la diagonal (triangular inferior) y también las entradas por debajo (la simetría); en definitiva, el mayor subespacio requerido es el de las matrices diagonales.

Finalmente, observemos que los sistemas generadores de un subespacio vectorial pueden contener, como en el caso del ejemplo 4 del ejercicio 1, un número «excesivo» de vectores, excesivo en el sentido de que se puede prescindir de algunos vectores y seguir teniendo un sistema generador. Este carácter excesivo de algunos sistemas generadores tiene un inconveniente: cada vector de V se expresa como combinación lineal de los vectores del sistema generador de diferentes maneras. Quizás este comentario quede más claro si se trabaja con el siguiente ejercicio.

Ejercicio 2: Considera los vectores de las columnas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ está en el espacio generado por ellos. Escribe ese vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de las columnas de A de dos formas distintas, al menos.

Que el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ está en el espacio generado por las columnas de A es evidente, pues a simple vista se observa que este vector es la suma de las dos primeras columnas de A : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c_2}$.

Claro que si queremos conseguir otra combinación lineal de las columnas de A para producir $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, tenemos que buscar otra solución del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La eliminación gaussiana aplicada a la matriz ampliada

conduce al sistema triangular: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En consecuencia, todas las soluciones del sistema, y, por tanto, todos los coeficientes que producen el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son $\begin{cases} x = 1 - 2z \\ y = 1 + z \\ z \text{ libre} \end{cases}$. Escribamos dos combinaciones lineales diferentes de

las columnas de A que dan lugar a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

— para $z = 1$: $(-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; — para $z = 0$: $1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

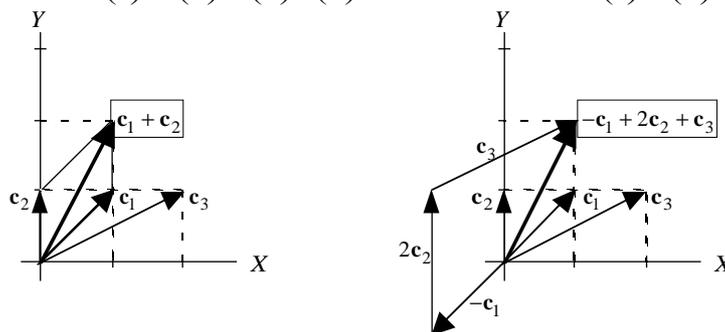


FIGURA 6: Dos combinaciones de los vectores columna de A que dan lugar al vector $(1, 2)$.

La verdad es que la culpa de esa abundancia de combinaciones lineales para conseguir un vector podemos echársela, por ejemplo, al tercer vector columna. ¿Por qué?, pues porque ese vector ya es combinación lineal de las dos primeras columnas. Estamos observando un hecho más general, que está enunciado en la siguiente propiedad.

Propiedad: Si uno de los vectores de un sistema generador de un espacio vectorial V es combinación lineal del resto, entonces el sistema sigue siendo generador al quitar ese vector.

Independencia lineal

Como hemos tenido oportunidad de observar, algunos sistemas generadores de un espacio vectorial V contienen un número «excesivo» de vectores. El objetivo de esta sección es conseguir sistemas generadores de un espacio vectorial lo más ajustados posibles, es decir, mínimos en cuanto al número de vectores que contengan; además se pretende que cada vector de V admita una única forma de expresarlo como combinación lineal de los generadores. El camino que recorreremos pasa por el concepto de independencia lineal de vectores y llega a la idea clave de base de un espacio vectorial, que es precisamente el sistema generador mínimo que buscamos.

Empezamos fijándonos en las combinaciones lineales de un conjunto de vectores que dan el vector nulo. Obviamente, la combinación lineal trivial, con todos los coeficientes cero, da lugar al vector nulo. La cuestión es si otra combinación produce cero y lo que queremos es que no sea así.

Definición: Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ del espacio vectorial V son *linealmente independientes* si la única combinación lineal que da lugar al vector nulo es aquella en la que todos los coeficientes son cero, es decir,

$$\text{cuando } t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \text{ sólo si } t_1 = \dots = t_k = 0.$$

En caso contrario, los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ se dicen *linealmente dependientes*, es decir, cuando la ecuación vectorial $t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ tiene al menos una solución con algún coeficiente no nulo. Esto equivale a decir que alguno de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ es combinación lineal de los otros

Aunque cada vez se usa menos, conviene conocer el siguiente vocabulario.

- Es lo mismo decir que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ son vectores linealmente independientes o decir que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ es un *sistema libre*;
- También es lo mismo decir que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ son vectores linealmente dependientes o que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ es un *sistema ligado*.

Ejemplos:

1. Cualquier conjunto de vectores que contenga al vector nulo, digamos $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, es linealmente dependiente.

Es evidente que la combinación lineal, no trivial, de coeficientes $t_1 = 5$ y $t_2 = \dots = t_k = 0$ produce el vector nulo $5 \cdot \mathbf{0} + 0\mathbf{v}_1 + \dots + 0\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.

2. Los vectores de las columnas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes, pues la tercera columna es dos veces la primera más la segunda.

Ahora bien, las filas de A son vectores linealmente independientes. En efecto, los coeficientes de la combinación lineal $s(1,2,4) + t(1,-1,1) = (0,0,0)$

son las soluciones del sistema lineal $\begin{cases} s+t=0 \\ 2s-t=0, \text{ y éstas son: } s=t=0. \\ 4s+t=0 \end{cases}$

Ejercicio 3: En el espacio vectorial de las funciones reales, elegimos tres sistemas de gran importancia en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\mathcal{H} = \{h_1(x) = e^{ax}, h_2(x) = e^{bx}\},$$

$$\mathcal{F} = \{f_1(x) = e^x, f_2(x) = xe^x, f_3(x) = x^2e^x\} \text{ y}$$

$$\mathcal{G} = \{g_1(x) = e^x \cos x, g_2(x) = e^x \sin x\}$$

Afirmamos que son libres, ¿por qué?

Comprobemos que, por ejemplo, el sistema \mathcal{F} es libre. Tenemos que probar que si $rf_1(x) + sf_2(x) + tf_3(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, entonces los tres coeficientes son nulos. En efecto, la igualdad $re^x + s(xe^x) + t(x^2e^x) = 0$ ha de verificarse para todos los valores de la variable x , es decir, disponemos de infinitas ecuaciones, una para cada valor de x . Elegimos tres valores cualesquiera de x y así tenemos:

$$\begin{cases} x=0: & r1+s(0)+t(0)=0 \\ x=1: & re+s(e)+t(e)=0 \\ x=2: & re^2+s(2e^2)+t(4e^2)=0 \end{cases}, \text{ es decir, } \begin{cases} r=0 \\ r+s+t=0 \\ r+2s+4t=0 \end{cases};$$

sistema lineal homogéneo cuya única solución es $r=s=t=0$, como queríamos demostrar.

En las próximas líneas dirigimos nuestra atención al espacio vectorial \mathbf{R}^m y pretendemos reconocer cómo los sistemas lineales permiten expresar y, por tanto, decidir si un sistema de vectores de \mathbf{R}^m es linealmente independiente (véase el segundo ejemplo de la página anterior). Comenzamos con unos ejemplos sencillos; en ellos los vectores, cuya independencia lineal queremos averiguar, contienen muchas componentes nulas.

En el primer ejemplo nos fijamos en las matrices triangulares y en el segundo, en las escalonadas superiores, los tipos de matrices que aparecen tras la eliminación gaussiana.

1. Las matrices triangulares superiores:

— Consideremos, por ejemplo, la matriz triangular superior $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Afirmamos que las columnas de T son linealmente independientes.

Para comprobarlo hay que resolver el sistema $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_T \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_0$, que

sólo tiene la solución nula.

Análogamente, las filas de T también son linealmente independientes, pues los coeficientes y_1 , y_2 e y_3 que verifican:

$(y_1 \ y_2 \ y_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_T = (0 \ 0 \ 0)$ han de ser nulos.

— Probar que si cualquier elemento de la diagonal de la matriz triangular superior $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ es cero, entonces las columnas son linealmente dependientes.

2. Las matrices escalonadas superiores: Consideremos, por ejemplo, la matriz escalonada $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

— Las columnas de U que contienen a los pivotes son linealmente independientes. Para comprobarlo, suponemos que una combinación de

las columnas pivote $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ da lugar al vector

nulo: $x\mathbf{c}_1 + z\mathbf{c}_3 = \mathbf{0}$ y necesitamos averiguar si los coeficientes x y z son nulos. En efecto, la ecuación $x\mathbf{c}_1 + z\mathbf{c}_3 = \mathbf{0}$, o bien, el sistema lineal

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ tiene como \u00fanica soluci\u00f3n la soluci\u00f3n cero.}$$

- Las restantes columnas son combinaci\u00f3n lineal de las pivote. En efecto, la segunda columna $\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{c}_1$ y la cuarta columna $\mathbf{c}_4 = \frac{2}{5}\mathbf{c}_1 + \frac{6}{5}\mathbf{c}_3$.
- Las filas distintas de cero de U son independientes. Proponemos al lector la comprobaci\u00f3n de esta afirmaci\u00f3n.

Los dos ejemplos expuestos ilustran una forma de elegir las columnas linealmente independientes de una matriz. El enunciado preciso del m\u00e9todo de elecci\u00f3n es el siguiente:

Propiedad: Las r columnas que contienen los pivotes de una matriz triangular o escalonada son linealmente independientes y tambi\u00e9n lo son sus r filas distintas de cero.

Averiguemos ahora, por ejemplo, si los vectores $(1,1,2)$, $(1,2,1)$ y $(3,1,1)$ son linealmente independientes, estos vectores no son tan sencillos como las filas o las columnas de las matrices triangulares y escalonadas del anterior

ejemplo. Para ello, hemos de comprobar que $x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ implica

que los coeficientes x , y y z son nulos. En definitiva, debemos averiguar que

el sistema homog\u00e9neo $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donde las columnas de la matriz de

coeficientes son los vectores dados, tiene \u00fanicamente la soluci\u00f3n nula. Al aplicar la eliminaci\u00f3n gaussiana a la matriz A se obtiene la matriz escalonada

$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$. Como la \u00fanica soluci\u00f3n de $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la soluci\u00f3n cero,

deducimos que la \u00fanica combinaci\u00f3n lineal de los vectores $(1,1,2)$, $(1,2,1)$ y $(3,1,1)$ que produce el vector nulo es la trivial. Por tanto, los vectores $(1,1,2)$,

(1,2,1) y (3,1,1) son linealmente independientes.

En este ejemplo no hemos hecho más que poner en práctica el concepto de independencia lineal y expresarlo en términos de sistemas lineales. Este proceso es un método general que enunciaremos a continuación.

Método para averiguar si un sistema de vectores de \mathbf{R}^m es libre: Una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ que produce el vector nulo es de la forma $t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$; si ahora estos vectores pasan a ser las columnas de una matriz A , entonces la escritura matricial de la anterior combinación lineal es $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$.

Aparecen los sistemas lineales como expresión del concepto de independencia lineal del siguiente modo:

- El conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de vectores de \mathbf{R}^m es libre si y sólo si el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde las columnas de A son los vectores del conjunto, sólo tiene la solución cero.
- Si el sistema $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de vectores de \mathbf{R}^m es ligado, entonces los coeficientes de una combinación lineal no trivial igual al vector nulo son cualquier solución no nula del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Los sistemas lineales también nos ayudan a deducir que los conjuntos de vectores de \mathbf{R}^m «demasiado» numerosos forman sistemas linealmente dependientes. Precisamos este comentario, dándole la categoría que le corresponde, en el siguiente enunciado.

Propiedad: Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ son vectores de \mathbf{R}^m y $n > m$, entonces el sistema $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente dependiente.

Demostración: La razón de esta afirmación está en el hecho de que la matriz A cuyas columnas son los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ tiene asociado un sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de menos ecuaciones que incógnitas ($m < n$); y, por tanto, hay variables libres (al menos $n - m$). En definitiva, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene soluciones distintas de la solución nula. \square

Como aplicación de esta propiedad, deducimos que los vectores (1,1,0), (1,0,0), (0,1,1) y (x,y,z) son linealmente dependientes, pues se trata de un conjunto de cuatro vectores del espacio \mathbf{R}^3 . Es decir, como el sistema

homogéneo $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de vectores}} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene más coeficientes o incógnitas (4) que

ecuaciones (3) , entonces tiene soluciones no nulas. Calcúlese alguna.

La unión del concepto de sistema generador con el de independencia lineal da lugar a la idea de base. El estudio de este concepto es el objetivo de la próxima sección.

12.3. Bases: Coordenadas y dimensión

Los espacios o subespacios vectoriales que nos interesan de forma especial son los que están generados por un sistema finito de vectores. No obstante, no debemos olvidar que hay otros muchos espacios para los que no existe ningún sistema finito que genere todos los vectores del espacio. Del primer tipo es el espacio \mathbf{R}^3 y del segundo es, por ejemplo, el espacio de los polinomios de grado cualquiera.

Definición: Una *base* de un espacio vectorial es un conjunto de vectores con dos propiedades que se verifican simultáneamente:

1. es linealmente independiente;
2. genera el espacio.

Tenemos a mano dos ejemplos de base muy sencillos. Los vectores $\mathbf{i}=(1,0)$ y $\mathbf{j}=(0,1)$ forman una base del espacio \mathbf{R}^2 ; del mismo modo $\{\mathbf{i}=(1,0,0), \mathbf{j}=(0,1,0), \mathbf{k}=(0,0,1)\}$ es una base de \mathbf{R}^3 .

El hecho de que una base disfrute de las propiedades de independencia lineal y de generación del espacio significa que cada vector del espacio admite una única representación como combinación lineal de los elementos de la base. Para destacar esta idea la escribimos de nuevo en la siguiente propiedad.

Propiedad: (*Unicidad de la representación*)

Un subconjunto $\mathcal{B}=\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de un espacio vectorial V es una base de V si y sólo si para cada vector $\mathbf{v} \in V$ hay unos *únicos* escalares t_1, \dots, t_n tales que

$$\mathbf{v} = t_1 \mathbf{v}_1 + \dots + t_n \mathbf{v}_n.$$

Demostración:

Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de V , genera todos los vectores $\mathbf{v} \in V$: $\mathbf{v} = t_1 \mathbf{v}_1 + \dots + t_n \mathbf{v}_n$. Sólo es necesario comprobar que otra posible combinación lineal que produzca el mismo vector \mathbf{v} debe tener los mismos coeficientes. Así pues, pongamos que $\mathbf{v} = s_1 \mathbf{v}_1 + \dots + s_n \mathbf{v}_n$, entonces restando las dos representaciones conseguimos: $\mathbf{0} = (t_1 - s_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (t_n - s_n) \mathbf{v}_n$; ahora bien, una base también es linealmente independiente, por lo cual deducimos que $t_1 - s_1 = \dots = t_n - s_n = 0$ o bien $t_1 = s_1, \dots, t_n = s_n$. Por lo tanto los coeficientes o pesos de la representación están unívocamente determinados por el vector \mathbf{v} .

Falta comprobar que si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ verifica la condición de unicidad de representación para cada vector $\mathbf{v} \in V$, entonces $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ha de ser una base de V . Proponemos al lector que se entretenga en pensar, pues casi no es necesario escribir el razonamiento que avala dicha implicación. \square

La propiedad que acabamos de demostrar concluye que los coeficientes de la representación $\mathbf{v} = t_1 \mathbf{v}_1 + \dots + t_n \mathbf{v}_n$ están unívocamente determinados por el vector \mathbf{v} . Esto nos lleva a la identificación del vector $\mathbf{v} \in V$ con el vector de \mathbf{R}^n formado por sus coeficientes $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$, que se llama *vector de coordenadas de \mathbf{v} en la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$* del espacio vectorial V . Los números t_1, \dots, t_n se llaman *coordenadas de \mathbf{v} respecto a la base \mathcal{B}* .

Ejercicio 4: Consideremos el espacio \mathbf{R}^2 y en él proponemos dos bases, entre las muchas que tiene: la llamada base canónica o estándar $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ y la base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{i}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Fijemos otro vector cualquiera del plano, por ejemplo $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y averigüemos cuál es el vector de coordenadas de \mathbf{w} en cada una de las bases anteriores.

Por un lado, el vector de coordenadas de \mathbf{w} en la base estándar $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ es $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, lo cual significa que $\mathbf{w} = 1\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Mientras que el vector de coordenadas de \mathbf{w} en la otra base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{i}, \mathbf{v} = (2,1)\}$ es $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, que significa $\mathbf{w} = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{v}$.

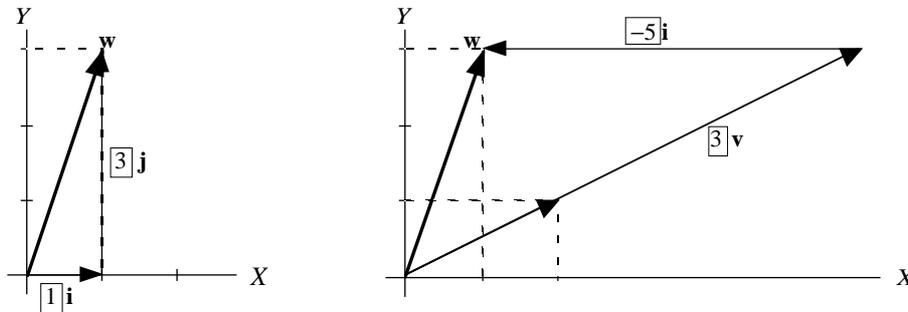


FIGURA 7: Coordenadas del vector w en la base estándar $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ y en la base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{i}, \mathbf{v} = (2,1)\}$.

Seguiremos en breve practicando y aplicando esta propiedad de representación, pero antes dediquemos algo de espacio y tiempo a una propiedad de las bases de un espacio vectorial: Aunque podemos elegir diferentes bases en un espacio vectorial V , todas ellas tienen algo común y es el número de vectores que forman la base. Esta propiedad, que enseguida vamos a estudiar con profundidad, es intrínseca al espacio vectorial.

Teorema: Si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ y $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ son bases del mismo espacio vectorial V , entonces $m = n$.

Demostración: Supongamos que una de las bases contiene menos elementos que la otra, por ejemplo, que $m < n$.

Como el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$, el que supuestamente contiene menos elementos, genera el espacio V , se tiene la siguiente representación de cada

$$\text{uno de los vectores de la otra base: } \begin{cases} \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 a_{11} + \dots + \mathbf{v}_m a_{m1} \\ \dots \\ \mathbf{w}_n = \mathbf{v}_1 a_{1n} + \dots + \mathbf{v}_m a_{mn} \end{cases} . \text{ Expresamos en}$$

forma «matricial» las n igualdades:

$$(\mathbf{w}_1 \quad \dots \quad \mathbf{w}_n) = (\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ es, por la hipótesis $m < n$, una matriz con

menos filas que columnas; en consecuencia, el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solución no nula.

$$\text{Por tanto, } (\mathbf{w}_1 \ \cdots \ \mathbf{w}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para algunos escalares x_1, x_2, \dots, x_n no nulos; es decir, hay una combinación lineal no nula de $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ que resulta el vector nulo: $x_1\mathbf{w}_1 + \dots + x_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0}$. Esto contradice la afirmación inicial sobre el hecho de que $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ es linealmente independiente.

La conclusión es que debemos abandonar la idea de que $m < n$, y, por tanto, ambas bases tienen el mismo número de elementos. \square

Si examinamos detenidamente la demostración anterior debemos concluir que se ha probado la siguiente propiedad: «si un espacio vectorial V es generado por m vectores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$, entonces cualquier conjunto $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ que contenga un número superior de vectores de V , $m < n$, es linealmente dependiente». Este enunciado se conoce como *Teorema de Steinitz*.

Definición: El número de vectores que contiene cualquier base de un espacio vectorial V se llama *dimensión* de V y se escribe $\dim V = n$.

La dimensión de un espacio vectorial viene a expresar el número de «grados de libertad» de los vectores del espacio.

Propiedades: Sea V un espacio vectorial con $\dim V = n$ y \mathcal{S} un conjunto de vectores de V .

1. Digamos que el número de vectores que contiene \mathcal{S} es m :
 - si \mathcal{S} es linealmente independiente, entonces $m \leq n$ y \mathcal{S} puede ampliarse a una base;
 - si \mathcal{S} genera a V , entonces $m \geq n$ y \mathcal{S} contiene una base.
2. Supongamos ahora que \mathcal{S} contiene n vectores, el mismo número que la dimensión de V :
 - si \mathcal{S} es linealmente independiente, entonces \mathcal{S} es una base;
 - si \mathcal{S} genera a V , entonces \mathcal{S} es una base.

Ejercicio 5: Vamos a comprobar en un ejemplo que *el subespacio generado por las columnas de una matriz escalonada admite como base las columnas pivote y que el espacio generado por sus filas tiene por base las no nulas*.

Así pues, consideramos la matriz escalonada $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a. El espacio generado por las cuatro columnas, el espacio columna de U , es un subespacio de \mathbf{R}^4 y queremos localizar una base de ese espacio columna. La situación es la siguiente:

El sistema $\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ genera el espacio

columna de U , pero no es una base porque no son linealmente independientes. Queremos extraer de \mathcal{S} una base del espacio columna y, desde luego, hay diferentes bases a elegir; proponemos una: la formada por

las columnas pivote. En este ejemplo, $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ forman una

base del espacio columna, que, por cierto, tiene dimensión dos.

- b. Además, las columnas primera y cuarta se expresan como combinación lineal de las básicas. ¿Cuáles son los coeficientes?

No hay ninguna duda de que la primera columna $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene ambas

coordenadas nulas respecto de la base. Sobre la cuarta columna $\mathbf{c}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ un

poco más de observación nos lleva a concluir que $\mathbf{c}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_3}$. Así

pues, las coordenadas de \mathbf{c}_4 respecto de la base elegida son -1 y 1 .

- c. En cuanto al espacio fila, las filas diferentes de la nula forman una base. Para la matriz U , las dos primeras filas forman una base de su espacio fila.
d. ¿Coinciden el espacio fila y el espacio columna? Desde luego que no.

Quizás no haga falta mencionarlo pero no nos resistimos a la tentación de volver a escribirlo: hay espacios vectoriales muy utilizados cuyos elementos

(vectores) no son n -tuplas de números reales. En el siguiente ejemplo consideramos espacios vectoriales de funciones pues se trata el problema de aproximar una función mediante un polinomio. Exponemos dos tipos de aproximación polinómica: la interpolación polinomial clásica y la aproximación mediante polinomios de Taylor. En cualquiera de los casos se maneja el espacio vectorial \mathcal{P}_n , de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes reales, que tiene dimensión $n+1$. Naturalmente, el espacio \mathcal{P}_n posee diferentes bases, como por ejemplo $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, y, como es natural, se opta por usar aquella base que haga más fácil la resolución del problema.

1. *Interpolación polinomial clásica:*

- a. El primer caso es el problema de la interpolación lineal. En el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a uno, \mathcal{P}_1 , se pretende localizar el único polinomio que coincide con una función f dada en los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Conviene usar la base $\{1, x-a\}$ de \mathcal{P}_1 , pues en ella se expresa muy fácilmente el polinomio interpolante requerido:

$$p_1(x) = f(a) \cdot 1 + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

cuya gráfica es la recta secante a la gráfica de la función f en los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$:

- b. El segundo ejemplo es el problema de la interpolación cuadrática o interpolación de orden dos, es decir, localizar un polinomio de grado no superior a dos que coincida con la función f en los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ y $(c, f(c))$.

De nuevo la base $\{1, x-a, (x-a)(x-b)\}$ de \mathcal{P}_2 hace que el trabajo de expresar el polinomio interpolante sea sencillo. La ecuación de la parábola que pasa por los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ y $(c, f(c))$ de la gráfica de la función f es

$$p_2(x) = f(a) \cdot 1 + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + \frac{\frac{f(c)-f(b)}{c-b} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{c-a}(x-a)(x-b)$$

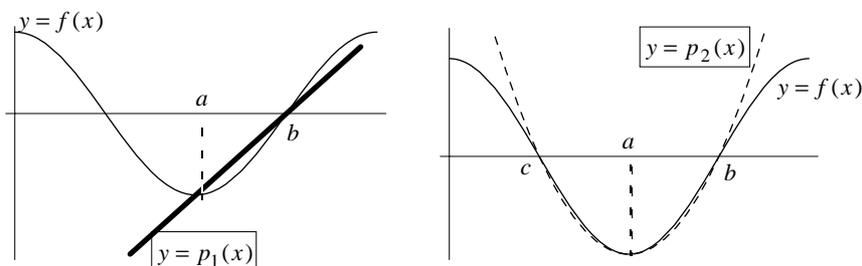


FIGURA 8: A la izquierda, con trazo grueso, el polinomio interpolante de grado uno y, a la derecha, con línea discontinua, el de grado dos.

2. *Polinomios de interpolación de Taylor*: La idea es conseguir el único polinomio de grado no superior a n que tenga un «contacto» de orden n con la función f en un punto $x=a$.

Por ejemplo, el polinomio de Taylor de grado dos de la función f en el punto $x=a$ es el único polinomio del espacio \mathcal{P}_2 que coincide con la función f en $x=a$ y cuyas dos primeras derivadas en $x=a$ también coinciden con las de f (contacto de orden dos).

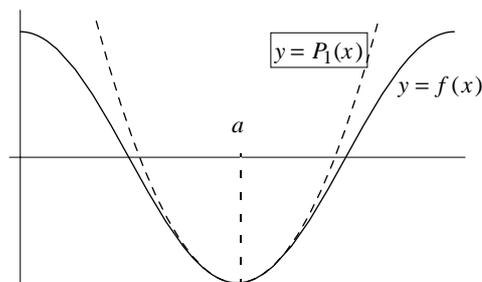


FIGURA 9: La línea discontinua representa el polinomio de Taylor de grado dos de f en $x=a$.

En este tipo de interpolación, la base de \mathcal{P}_2 más adecuada para resolver el problema es $\{1, x-a, (x-a)^2\}$. En esta base la ecuación del polinomio de Taylor de grado dos es

$$P_2(x) = f(a) \cdot 1 + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2.$$

Hemos estudiado ya todas las ideas que queríamos describir sobre las bases de un espacio vectorial, tan solo nos falta ponerlas en práctica en algunos ejemplos más. Terminamos, pues, esta sección con dos ejercicios de enunciado geométrico en los que, además de manejar las anteriores ideas de dimensión y de coordenadas, echamos un vistazo a los cambios de coordenadas.

Ejercicio 6: Consideramos dos bases en \mathbf{R}^2 : la base canónica o estándar $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ y la base $\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{u} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}, \mathbf{v} = \frac{-\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}} \right\}$ y respondemos a las siguientes

cuestiones:

- Representar gráficamente e indicar el movimiento del plano que lleva la primera a la segunda.
- Averiguar si efectivamente $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es una base de \mathbf{R}^2 .
- ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\mathbf{w} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ respecto a la base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$?

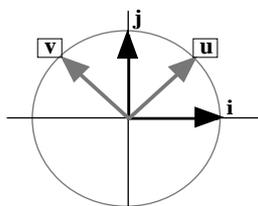


FIGURA 10: Las dos bases del ejercicio 6.

Empezamos a responder:

- Observemos en primer lugar que los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} del sistema \mathcal{B}' son el resultado de girar $\frac{\pi}{4}$ radianes, en el sentido positivo, los vectores \mathbf{i} y \mathbf{j} de la base \mathcal{B} . En efecto, usando el producto de números complejos, tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} = \underbrace{e^{i\frac{\pi}{4}}}_{\text{giro de } \frac{\pi}{4}} \mathbf{i} = (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \cdot (1 + 0i) = (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} \\ \mathbf{v} = \underbrace{e^{i\frac{\pi}{4}}}_{\text{giro de } \frac{\pi}{4}} \mathbf{j} = (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \cdot (0 + 1i) = (-\sin \frac{\pi}{4} + i \cos \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} \end{array} \right.$$

- La forma más rápida de averiguar si efectivamente $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es una base de \mathbf{R}^2 consiste en aplicar que cualquier sistema formado por dos vectores de \mathbf{R}^2 (dos es precisamente la dimensión de este espacio) es base en cuanto hayamos comprobado que o bien genera el espacio, o bien está formado por vectores linealmente independientes. Suele ser más sencillo comprobar la independencia lineal.

Para ello ha de comprobarse que el sistema homogéneo $x \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} + y \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tan solo tiene la solución trivial. Comprobación

que no entraña ninguna dificultad y que el lector puede hacer.

- Por último, las coordenadas del vector $\mathbf{w} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ respecto a la base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ son los coeficientes de la combinación lineal $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$. Se

calculan resolviendo de nuevo un sistema lineal: $a \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, o

bien, en forma matricial $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. La única solución es

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{2}} \\ \frac{-x+y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En el último apartado del ejercicio 1 hemos hecho un trabajo sobre el que vamos a reflexionar. Hemos dicho que las coordenadas del vector $(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ respecto a la base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ se calculan resolviendo el sistema:

$$a \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ que expresado en forma matricial es } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Esta forma matricial nos permite leer una relación de interés entre las coordenadas de un mismo vector en diferentes bases. Decimos que la multiplicación por la matriz $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ convierte las coordenadas $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$,

respecto a la nueva base \mathcal{B}' , en las coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ respecto a la base estándar \mathcal{B} . Obsérvese que las columnas de la matriz P son precisamente las coordenadas de los vectores de la nueva base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ respecto a la base usual $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. Observemos un detalle más: la matriz P , cambio de coordenadas de la base \mathcal{B}' a la base \mathcal{B} , es inversible.

Le pedimos al lector que reflexione sobre la igualdad: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, que convierte las coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ respecto a la base \mathcal{B} en las coordenadas $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ respecto a la base \mathcal{B}' . Con el fin de orientar su reflexión, le indicamos que las preguntas importantes son:

- ¿sería capaz de decir cuáles son las entradas de P^{-1} ?
- ¿sabe que significan o qué son las columnas de P^{-1} ?

Ejercicio 7: Denotamos por (x, y, z) las coordenadas de un vector del espacio respecto de a la base usual $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ y consideramos la recta de ecuaciones

$$\text{paramétricas } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}.$$

¿Cuáles son unas ecuaciones paramétricas de esa recta, si se toma como nueva base $\{\mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{k}+\mathbf{i}\}$?

En primer lugar, decidimos escribir (a,b,c) para referirnos a las coordenadas de un vector del espacio respecto a la nueva base $\{\mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{k}+\mathbf{i}\}$. El problema consiste en escribir las ecuaciones que han de verificar las coordenadas (a,b,c) de un punto que esté en la recta dada.

En las ecuaciones paramétricas, respecto a la base estándar,

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=2+t \end{cases}$$

está muy visible la siguiente información de la recta:

- primero, pasa por el punto $P(1,0,2)$, coordenadas respecto a la base usual
- segundo, un vector director es $\mathbf{v}=(-1,1,1)=-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

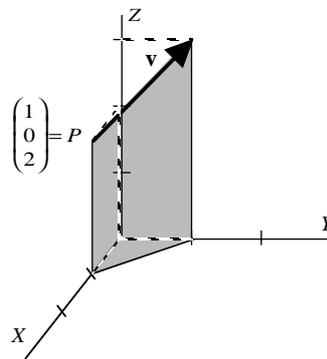


FIGURA 11: La recta en coordenadas cartesianas.

Nuestra tarea es expresar esta información en coordenadas respecto a la nueva base y así lo hacemos:

- En primer lugar, las coordenadas (a,b,c) del punto P son los únicos números reales que verifican $1\mathbf{i}+0\mathbf{j}+2\mathbf{k}=a(\mathbf{i}+\mathbf{j})+b(\mathbf{j}+\mathbf{k})+c(\mathbf{i}+\mathbf{k})$, es decir, $1\mathbf{i}+0\mathbf{j}+2\mathbf{k}=(a+c)\mathbf{i}+(a+b)\mathbf{j}+(b+c)\mathbf{k}$.

Ahora bien, como $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ es una base, los coeficientes de cada vector básico en ambos lados de la igualdad deben coincidir. Así pues, tenemos el

$$\text{sistema } \begin{cases} a+c=1 \\ a+b=0 \\ b+c=2 \end{cases}, \text{ cuya solución es } \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

- En segundo lugar, las coordenadas (a,b,c) del vector director

$$\mathbf{v}=(-1,1,1)=-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}=a(\mathbf{i}+\mathbf{j})+b(\mathbf{j}+\mathbf{k})+c(\mathbf{i}+\mathbf{k})$$

son la única solución de un sistema muy parecido al anterior (la matriz de coeficientes es la misma y lo que varía es el término independiente):

$$\begin{cases} a+c=-1 \\ a+b=1 \\ b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{3}{2} \\ c=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

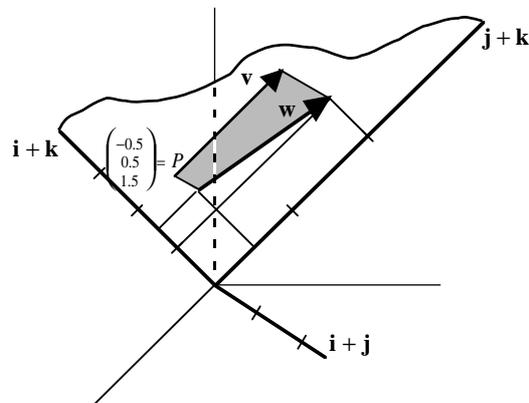


FIGURA 12: El vector w del dibujo es el vector componente de v en el plano generado por los dos últimos vectores de la nueva base $\{\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{i} + \mathbf{k}\}$.

En consecuencia, unas ecuaciones paramétricas de la recta dada, respecto a la nueva base $\{\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{i}\}$, son

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \\ c = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \end{cases}.$$

Con la idea de usar números enteros en las ecuaciones paramétricas, decidimos usar otro punto de la recta y como vector director un múltiplo escalar (el doble) del usado y así, otras ecuaciones paramétricas de la recta son

$$\begin{cases} a = -1 - t \\ b = 2 + 3t \\ c = 1 - t \end{cases}$$

Añadimos al ejercicio una observación sobre el cambio de coordenadas y algunas preguntas con respuestas a las que el lector puede llegar con lo estudiado hasta ahora.

La matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ permite realizar mediante una sencilla

multiplicación el cambio de las coordenadas en la base $\{\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{i}\}$ a las coordenadas respecto a la base usual $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, ¿a qué multiplicación nos estamos refiriendo? Y si queremos realizar el cambio de coordenadas contrario, de la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ a la base $\{\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{i}\}$, ¿qué matriz interviene y qué producto debería realizarse?

12.4. Teoría de los sistemas lineales

El título de la sección es suficientemente claro como para deducir que vamos a estudiar los sistemas lineales. Ya sabemos resolverlos usando el método de eliminación de Gauss o la factorización LU de la matriz de coeficientes, así que el objetivo de esta sección es de otra índole. Pero, ¿qué pretendemos? Si nos conformamos con saber resolver sistemas lineales, nos perdemos no sólo conocer y , por tanto, dominar cómo son las soluciones y si las tiene (aspectos muy útiles en aquellas ocasiones en que no necesitamos gastar nuestro tiempo en calcularlas), sino también entender el importante papel de la matriz de coeficientes y todo lo que lleva consigo, como iremos descubriendo a lo largo de esta sección.

El trabajo que nos espera consiste en relacionar los subespacios asociados a una matriz con las soluciones de los sistemas lineales, en aprender a encontrar bases de los subespacios fundamentales asociados a una matriz A y, como consecuencia, en observar las relaciones entre sus dimensiones.

Para obtener bases de los subespacios asociados a una matriz, recurriremos a transformar, mediante la eliminación gaussiana, la matriz A en una matriz escalonada U . ¿Por qué? Las razones son dos: primero, los subespacios asociados a una matriz escalonada son fáciles de estudiar, de hecho hemos indicado bases de alguno de estos subespacios en la sección anterior y, segundo, los subespacios de ambas matrices A y U están relacionados de tal modo (algunos incluso son idénticos) que permiten resolver el problema planteado. Claro que esta última observación no supondrá ningún descubrimiento, pues los subespacios de una matriz se definen en términos de sistemas lineales y los sistemas lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ tienen las mismas soluciones.

Además, comparando las dimensiones de los subespacios asociados a una matriz deduciremos la idea de rango de una matriz y la llamada igualdad fundamental del Álgebra lineal.

Estructura de las soluciones de un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

En este apartado dedicamos nuestro esfuerzo a averiguar la estructura del conjunto de las soluciones, si las hay, de un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. El primer paso consiste en conocer propiedades de las soluciones de los sistemas lineales homogéneos, es decir, primero imponemos que el lado derecho del sistema sea $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ y nos preguntamos por las soluciones del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

para después abordar el caso de los no homogéneos, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

• *Estructura de las soluciones del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$*

Probamos, en primer lugar, que el conjunto de vectores solución de un sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un subespacio vectorial de \mathbf{R}^n . Este subespacio es el que definimos como espacio nulo de la matriz A .

Propiedad: Sea A una matriz de tamaño $m \times n$, entonces el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un subespacio de \mathbf{R}^n .

Demostración: Para comprobarlo tomamos dos vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} que sean solución del sistema homogéneo, es decir, que verifiquen $\begin{cases} A\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ A\mathbf{y} = \mathbf{0} \end{cases}$ y veamos que cualquier combinación lineal de ambos $s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ también es solución. En efecto,

$$A(s\mathbf{x} + t\mathbf{y}) = s(A\mathbf{x}) + t(A\mathbf{y}) = s\mathbf{0} + t\mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad \square$$

Definición: Si la matriz A es de tamaño $m \times n$, entonces el *espacio nulo* o *núcleo* de A , que escribimos $\mathcal{N}(A)$, es el subespacio de \mathbf{R}^n formado por las soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Consecuencia de la definición de espacio nulo de una matriz es el siguiente cuadro en el que escribimos en dos columnas cómo las ideas se pueden expresar indistintamente en el lenguaje de los sistemas lineales o en el lenguaje de las matrices.

Sobre el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de m ecuaciones y n incógnitas: *Sobre la matriz A de tamaño $m \times n$:*

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Siempre tiene la solución nula $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 2. Si A tiene más incógnitas que ecuaciones, $n > m$, entonces el sistema homogéneo tiene soluciones distintas de la nula; de hecho hay una infinidad, pues deben existir al menos $n - m$ variables libres. 3. Si $n \leq m$, entonces no hay una respuesta general sobre la existencia de soluciones no nulas de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. | <ol style="list-style-type: none"> 1'. El vector nulo siempre está en $\mathcal{N}(A)$. 2'. Si A tiene más columnas que filas, $n > m$, entonces $\mathcal{N}(A)$ contiene vectores distintos del cero; de hecho hay una infinidad, pues deben existir al menos $n - m$ variables libres. 3'. Si $n \leq m$, entonces no hay una respuesta general sobre la existencia de vectores distintos de cero en $\mathcal{N}(A)$. |
|--|--|

La siguiente cuestión es inevitable, pues queremos identificar sin ninguna duda cuáles son los vectores del espacio nulo: ¿podemos dar un sistema generador o, mejor, una base de $\mathcal{N}(A)$? La respuesta depende del cálculo de soluciones de un sistema lineal; en particular, del método de eliminación de Gauss.

Propiedad: El espacio nulo de la matriz A coincide con el espacio nulo de la matriz escalonada U obtenida de A mediante eliminación gaussiana. Es decir, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(U)$.

La consecuencia es que no hay ninguna dificultad en encontrar una base y la dimensión del espacio $\mathcal{N}(A)$, pues basta dar esa información de $\mathcal{N}(U)$. De hecho, tenemos la siguiente propiedad.

Propiedad: Supongamos que r es el número de pivotes del método de eliminación gaussiana que lleva la matriz A , de tamaño $m \times n$, a la matriz escalonada U .

1. El espacio nulo de A , o bien el espacio nulo de U , tiene $n - r$ variables libres, las correspondientes a las columnas de U que no contienen pivotes.
2. Una *base* del espacio nulo de A está formada por los $n - r$ vectores que se construyen dando el valor uno a una de las variables libres y cero a las restantes en la solución general del sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. Por tanto, la *dimensión* del espacio $\mathcal{N}(A)$ es $n - r$, el número de variables libres o columnas que no contienen pivotes, llamada la *nulidad* de A .

Por ejemplo, consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, que es equivalente a la matriz escalonada $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como el espacio nulo de ambas matrices coincide y sólo hay una columna pivote, la segunda, deducimos que:

- La dimensión del espacio nulo de A es 3, el número de columnas sin pivotes o variables libres del sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Al ser el conjunto de soluciones de $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -4x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

los vectores $(1, 0, 0, 0)$, $(0, -4, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$ constituyen una base del espacio nulo de A .

• *Estructura de las soluciones del sistema no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*

En la siguiente propiedad enunciamos formalmente que el conjunto de todas las soluciones del sistema compatible $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede expresar como una solución particular más la solución general del sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Propiedad de estructura de las soluciones de un sistema lineal no homogéneo: Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Si el sistema no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución \mathbf{p} , llamada *solución particular*, entonces todas las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se pueden escribir en la forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{x}_h,$$

donde $\mathbf{x}_h \in \mathcal{N}(A)$.

Demostración: Animamos al lector a que compruebe, por un lado, que todos los vectores de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{x}_h$ son soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y que, por otro lado, cualquier vector $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$ que sea solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha de cumplir que $\mathbf{q} - \mathbf{p} \in \mathcal{N}(A)$. Estas comprobaciones demuestran la propiedad.

Ejercicio 8: Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -8 & 5 & -1 & 14 \end{pmatrix}$.

1. Empezamos reduciendo, mediante la eliminación gaussiana, la matriz A a una forma escalonada U :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -8 & 5 & -1 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2.^{\text{a}} \text{ fila} - 3(1.^{\text{a}} \text{ fila}) \rightarrow 2.^{\text{a}} \text{ fila} \\ 3.^{\text{a}} \text{ fila} - 4(1.^{\text{a}} \text{ fila}) \rightarrow 3.^{\text{a}} \text{ fila}}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 10 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{3.^{\text{a}} \text{ fila} - (-5)(2.^{\text{a}} \text{ fila}) \rightarrow 3.^{\text{a}} \text{ fila}} U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

La factorización LU , resultado de expresar como producto de matrices la eliminación gaussiana realizada, es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -8 & 5 & -1 & 14 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_U$$

2. Calculamos el espacio nulo de A , que es el mismo que el espacio nulo de U :

El espacio nulo de la matriz A , de tamaño 3×5 , es el subespacio de \mathbf{R}^5 formado por las soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; es decir, por las soluciones del sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$U\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las columnas pivote son la primera, tercera y cuarta, así que expresamos las soluciones en función de las variables libres x_2 y x_5 como sigue:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - x_5 \\ x_2 \\ -2x_5 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En definitiva, una base del espacio nulo de A está formada por los vectores

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geométricamente, este espacio nulo es el «plano» de \mathbf{R}^5 que

está generado por los vectores $(2,1,0,0,0)$ y $(-1,0,-2,0,1)$.

3. Veamos que las soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ son la suma de una particular y de las soluciones del sistema homogéneo asociado.

En el apartado 1 hemos aplicado la eliminación gaussiana a la matriz de

coeficientes del sistema $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -8 & 5 & -1 & 14 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$ y deducido la

factorización LU que produce; así que tenemos la información necesaria para resolver el sistema no homogéneo

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se reduce a resolver dos sistemas triangulares sucesivamente: como el

primero de ellos $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}}_L \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ tiene por solución $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, el

segundo sistema triangular es $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, cuyas

soluciones son las del sistema inicial $Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2x_2-x_5 \\ x_2 \\ 1-2x_5 \\ 2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{una solución particular}} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{las soluciones del sistema homogéneo asociado}} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Estas soluciones se encuentran en un plano del espacio \mathbf{R}^5 , pero no es un subespacio ya que no pasa por el origen. De hecho el plano referido es paralelo al espacio nulo, pero trasladado a lo largo de un vector que sea solución particular.

Obviamente, las soluciones pueden obtenerse de multitud de maneras diferentes pues basta elegir diferentes soluciones particulares. Así, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{x}_h, \text{ o bien } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{x}_h, \text{ o bien...}$$

donde \mathbf{x}_h es una solución genérica del sistema homogéneo asociado.

Veamos, como ejemplo, que la estructura de las soluciones de un sistema lineal aparece de forma análoga al considerar las soluciones de una ecuación diferencial cuyos coeficientes son constantes.

En efecto, por un lado, el conjunto

$$V_h = \{y(x) \text{ verifica } ay'' + by' + cy = 0\}$$

de las soluciones de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$ay''+by'+cy=0$, donde la función $y(x)$ es la incógnita y los coeficientes a , b y c son constantes, es un espacio vectorial. La demostración de esta afirmación es un sencillo ejercicio que proponemos al lector, al que le queremos indicar que es clave la aplicación de dos propiedades de las derivadas: $(f+g)'=f'+g'$ y $(k.f)'=k.f'$.

Por otro lado, si ahora la ecuación diferencial no es homogénea, $ay''+by'+cy=f(x)$, y sabemos que la función $u(x)$ es una de sus soluciones, entonces también es un sencillo ejercicio probar que todas las soluciones de $ay''+by'+cy=f(x)$ son el resultado de sumar a la solución particular $u(x)$ todas las soluciones de la ecuación homogénea asociada: $u(x)+y_h(x)$, donde $y_h \in V_h$.

Compatibilidad del sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$

El espacio columna o recorrido de A

En el apartado anterior hemos averiguado cuál es la estructura del conjunto de todas las soluciones de un sistema compatible, pero nos falta entender por qué un sistema lineal no homogéneo $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ tiene soluciones. El espacio columna de la matriz A es el que juega un papel clave para comprender la compatibilidad del sistema lineal.

Comenzamos con un sencillo ejemplo. La compatibilidad del sistema lineal $\begin{cases} x+3y=b_1 \\ 2x+5y=b_2 \end{cases}$ es la propiedad que ahora nos ocupa y nos preguntamos qué vectores $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ hacen que el sistema sea compatible. La expresión del sistema lineal en la forma vectorial $x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ nos hace comprender cuál es la respuesta, que está enunciada en la siguiente propiedad.

Propiedad: El sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ es compatible si y sólo si el vector \mathbf{b} puede ser expresado como una combinación lineal de las columnas de A .

Vista esta propiedad es comprensible que demos la entidad que merece al subespacio generado por las columnas de una matriz en la siguiente definición.

Definición: El *espacio columna* de A , matriz de tamaño $m \times n$, es el subespacio de \mathbf{R}^m generado por los vectores de las columnas de A . Escribimos $\mathcal{Col}(A)$ para designar ese subespacio.

El espacio columna también se llama *recorrido* de A y se escribe $\mathcal{R}(A)$, notación que concuerda con la idea usual de recorrido de una función f .

La equivalencia «*el sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ es compatible (tiene solución) si y sólo si el vector \mathbf{b} está en el subespacio generado por las columnas de A* » es, como todas las equivalencias, una propiedad de doble sentido. Queremos decir que, por un lado, nos va a permitir conocer mejor los sistemas lineales $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ a partir del espacio columna de A y, por otro lado, podemos averiguar si un elemento pertenece o no a un subespacio generado por ciertos vectores sencillamente resolviendo un sistema lineal.

Método para averiguar si un vector está en el espacio generado por un conjunto de vectores: «Para decidir si un vector $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ está en el espacio generado por los vectores $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ del espacio \mathbf{R}^m , pónganse estos vectores en las columnas de la matriz $A=(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$ e inténtese resolver el sistema lineal $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ ».

Por ejemplo, decidir si el vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ está en el espacio generado por $\left\{c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$ es equivalente a saber si el sistema lineal $\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+5y=3 \end{cases}$ es compatible. Además la solución del sistema: $x=-1$ e $y=1$ son los coeficientes de la combinación lineal de los vectores columna que da lugar al vector de términos independientes, esto es, $(-1)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{c_1} + 1\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{c_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

El siguiente objetivo sobre el espacio columna de una matriz es conseguir una base del mismo. De nuevo, echamos mano de la matriz escalonada U que resulta al aplicar la eliminación gaussiana a la matriz de partida A . Aunque la eliminación no modifica el espacio nulo, el hecho es que los espacios columna cambian. Pero hay algo positivo: las columnas de ambas matrices A y U verifican las mismas relaciones de dependencia lineal.

Por ejemplo, sabiendo que la matriz escalonada $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ procede de aplicar la eliminación gaussiana a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 11 & 14 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, nos preguntamos: ¿es cierto que las columnas de A que ocupan el mismo lugar que

las columnas independientes de U son también independientes? Claro que sí, pues las soluciones de $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ son las mismas que las de $U\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Seamos más explícitos.

Las columnas linealmente independientes de la matriz escalonada U son la primera y la tercera, esto significa que la única combinación lineal que da el

vector nulo: $x\mathbf{c}_1+z\mathbf{c}_3=\mathbf{0}$, o bien, $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es la nula.

Observemos que esta afirmación significa que el sistema lineal equivalente

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 11 & 14 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene como única solución la solución cero. En

definitiva, las columnas primera y tercera de A también son linealmente independientes.

Propiedad: Un conjunto de columnas de A es linealmente independiente si y sólo si las correspondientes columnas de U también son linealmente independientes.

Demostración: El razonamiento se basa en utilizar $A\mathbf{x}=\mathbf{0} \Leftrightarrow U\mathbf{x}=\mathbf{0}$; es decir en que ambos sistemas tienen las mismas soluciones. En términos de las columnas de ambas matrices leemos: los coeficientes de una combinación lineal de las columnas de A que dan cero son los mismos coeficientes que dan cero en una combinación lineal de las columnas de U . \square

En consecuencia,

- Como las r columnas de U que contienen los pivotes son una base del espacio columna de U (lo vimos en la sección anterior), entonces las correspondientes columnas pivote de A forman una *base del espacio columna* $\mathcal{R}(A)$.
- La *dimensión del espacio columna* o *rango por columnas* de A es el número de pivotes r de la eliminación gaussiana ($r \leq m$ y $r \leq n$).

Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -8 & 5 & -1 & 14 \end{pmatrix}$ del ejercicio 8 es equivalente a la matriz escalonada $U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Ya sabemos que

una base del espacio columna de U está formada por las tres columnas de los pivotes (la primera, la tercera y la cuarta), por tanto, el espacio columna de A tiene dimensión 3 (el rango por columnas de A es 3) y una base del mismo está formada por las columnas pivote:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{c}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De donde deducimos que el espacio columna de A es \mathbf{R}^3 .

Ejercicio 9: Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ y vamos a responder a las siguientes preguntas:

- Construir una base e indicar la dimensión del espacio columna de A .
- Describir el conjunto de vectores $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ que hacen compatible el sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

- Decide cuáles de los siguientes sistemas son compatibles, sin calcular las soluciones: $\begin{cases} y+4z=3 \\ 2y+8z=6 \end{cases}$, $\begin{cases} y+4z=3 \\ 2y+8z=5 \end{cases}$ y $\begin{cases} y+4z=0 \\ 2y+8z=0 \end{cases}$.

Respondemos a todas estas preguntas tomando como referencia el trabajo que ya hicimos en el apartado anterior para calcular el espacio nulo de esta matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$. Ya observamos que A es equivalente a la matriz escalonada $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y, aunque no es importante para responder a las preguntas que ahora nos planteamos, además obtuvimos una base del espacio

$$\text{nulo: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Del sistema de columnas de A extraemos una base del espacio columna; por ejemplo, la formada por la única columna pivote: $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Por tanto, la dimensión de $\mathcal{C}ol(A)$ (o $\mathcal{R}(A)$) es uno (el número de pivotes).

- Para describir el conjunto de vectores $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ que hacen compatible el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sólo tenemos que aplicar que esos vectores deben estar en el espacio columna de A y, por tanto, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = s \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_2} = \begin{pmatrix} s \\ 2s \end{pmatrix}$.

- c. Sobre la compatibilidad de los sistemas $\begin{cases} y+4z=3 \\ 2y+8z=6 \end{cases}$, $\begin{cases} y+4z=3 \\ 2y+8z=5 \end{cases}$ y $\begin{cases} y+4z=0 \\ 2y+8z=0 \end{cases}$ afirmamos que tan solo el primero de los dos sistemas, no homogéneos, es compatible (la razón está en el apartado b) indeterminado, y que, por supuesto, el sistema homogéneo es compatible (¿cuáles son sus soluciones?).

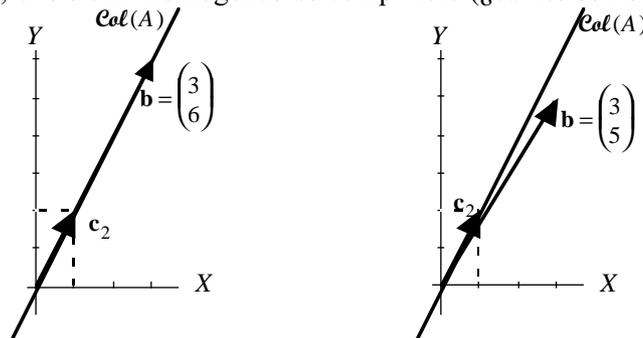


FIGURA 13: El espacio columna de la matriz A y los dos vectores, no nulos, de los lados derechos de los sistemas del apartado c del ejercicio 9.

Ejercicio 10: Construir una base e indicar la dimensión de los subespacios nulo y columna de la matriz: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Describe el espacio columna de B .

Indica si el sistema $\begin{cases} x+2y=1 \\ y+z=0 \\ x+2y=1 \end{cases}$, cuya matriz ampliada es B , tiene soluciones, sin resolverlo.

En general, la localización de una base de los subespacios nulo y columna de una matriz B es sencilla una vez reducida, por el método de Gauss, a su equivalente escalonada: $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En este caso, el espacio nulo o núcleo de ambas matrices es de dimensión dos (número de columnas menos número de pivotes) y, como las soluciones del sistema homogéneo son $\begin{cases} x_1 = 2x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 \text{ libre} \\ x_4 \text{ libre} \end{cases}$, una de sus bases es $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

En cuanto al espacio columna, las columnas básicas de U son la primera y la segunda (las que contienen los pivotes) y, por tanto, una base del espacio

columna de B es $\left\{ \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Así que su descripción consiste en decir que todos los vectores del espacio columna de B son de la forma $s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2t \\ t \\ s+2t \end{pmatrix}$, cuando s y t recorren los números reales.

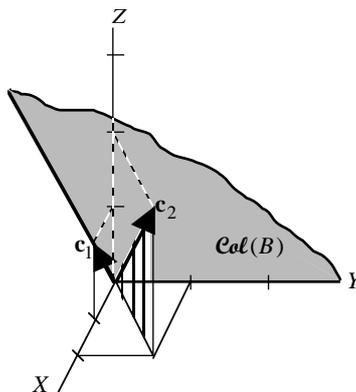


FIGURA 14: El espacio columna de la matriz B del ejercicio 10.

Finalmente, para decidir si el sistema $\begin{cases} x+2y = 1 \\ y+z = 0 \\ x+2y = 1 \end{cases}$, cuya matriz ampliada

es B , tiene soluciones, sin resolverlo, sólo tenemos que utilizar el hecho de que el espacio generado por las columnas de la matriz B tiene por base las dos primeras. Esto significa que la cuarta columna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de

esas dos primeras, en definitiva, el término independiente del sistema $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

pertenece al espacio columna de la matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

En el siguiente ejercicio estamos interesados en observar por qué el espacio columna de una matriz cuadrada, en particular su dimensión, ayuda a decidir si la matriz es inversible.

Ejercicio 11: Calcula la dimensión y una base del espacio columna de la matriz cuadrada $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Es el sistema $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ compatible para todos los lados derechos \mathbf{b} ? ¿Es C inversible?

Primero, una base del espacio columna de C está formada por las columnas primera, tercera y cuarta, y, en consecuencia, su dimensión es tres.

Es evidente que el sistema $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no es siempre compatible; basta tener en cuenta que la última ecuación del sistema es imposible en cuanto elijamos un vector \mathbf{b} cuya última coordenada no sea nula. Es decir, $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible

si y sólo si $\mathbf{b} \in \text{Cal}(C)$, en definitiva, si $\mathbf{b} = r \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_1} + s \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_3} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}_4} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ afirmamos

que C no es inversible, ¿por qué? La respuesta se puede encontrar en el tema 11 dedicada al estudio de las matrices inversibles.

Conviene no desperdiciar el trabajo hecho en este último ejercicio; concretamente, es muy interesante recordar que una matriz cuadrada A , de orden n , tiene inversa siempre y cuando $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible para todo \mathbf{b} y traducirlo en términos del subespacio columna de A : A es inversible si y sólo si todos los vectores \mathbf{b} están en el espacio columna de A . En definitiva, A es inversible si y sólo si $\dim \text{Cal}(A) = n$.

Subespacios asociados a una matriz. Rango de una matriz

- *Espacio fila: base y dimensión. Rango por filas de una matriz*

El espacio fila de una matriz A es el espacio generado por sus filas. Si la matriz A es de tamaño $m \times n$, entonces el espacio fila de A es un subespacio de \mathbf{R}^n .

Propiedad: El espacio fila de la matriz A y el de una matriz escalonada U , equivalente a A , son idénticos. Es decir, las operaciones elementales que llevan desde la matriz A hasta la matriz U no alteran el espacio fila.

Demostración: En efecto, cada fila de la nueva matriz U es una combinación de las filas de la matriz A , es decir, el espacio fila de U está contenido en el espacio fila de A . Además cada paso de la eliminación es reversible mediante una operación elemental, luego el espacio fila de A está contenido en el

espacio fila de U . \square

En otras palabras, el enunciado de la propiedad dice: Dados los vectores $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$ del espacio \mathbf{R}^n , las operaciones elementales

- Cambiar el orden de los vectores del sistema.
- Sustituir un vector del sistema por un múltiplo escalar no nulo.
- Sustituir un vector \mathbf{f}_j del sistema por el vector $\mathbf{f}_j + t\mathbf{f}_i$.

transforman el sistema $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$ en otro equivalente, en el sentido de que generan el mismo subespacio.

En consecuencia, conocida una base y la dimensión del espacio fila de U también conocemos una base y la dimensión del espacio fila de A . Expresamos esta idea con más detalle en los siguientes puntos:

- a. *Las filas distintas de cero de la matriz escalonada U constituyen una base de su espacio fila (véase III.3) y, por tanto, también forman una base del espacio fila de A .*
- b. *La dimensión del espacio fila de A y del espacio fila de U es la misma. Esta dimensión común r es el número de pivotes de la eliminación gaussiana ($r \leq m$ y $r \leq n$) y se llama rango por filas de A .*

Tomamos como ejemplo la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ y tras aplicar la eliminación gaussiana llegamos a la matriz escalonada $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como el espacio fila de ambas matrices coincide, tenemos:

- El vector fila $(0, 1, 4, 0)$ es una base del espacio fila de A .
- La dimensión del espacio fila y, por tanto, el rango por filas de A es 1.

No podemos dejarnos en el tintero una interesante relación entre el espacio fila y el espacio nulo de una matriz, ambos subespacios de \mathbf{R}^n . Para ello, recordemos una vez más cómo se realiza el producto de matriz A por vector \mathbf{x} : se efectúa el producto escalar de cada fila de A por el vector columna \mathbf{x} . En el caso de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, leemos «cuando \mathbf{x} está en el espacio nulo de A , todas las filas de A son ortogonales a \mathbf{x} »; lo cual conlleva que el *espacio fila es perpendicular al espacio nulo*.

• *Rango de una matriz*

Buenas noticias: no necesitamos mencionar nuevos subespacios asociados a una matriz (aunque sí que los hay). Entonces ¿qué novedades nos esperan en las siguientes líneas?; ciertamente pocas pero muy interesantes conclusiones de cuanto hemos trabajado en esta sección. Ponemos de manifiesto que las dimensiones de los espacios anteriores están relacionadas, relaciones que nos conducirán a la idea de rango de una matriz y a la denominada igualdad fundamental del Álgebra lineal.

Observando las dimensiones de los tres subespacios asociados a una matriz A de tamaño $m \times n$, se llega a las siguientes conclusiones:

Propiedad: A es una matriz de tamaño $m \times n$.

1. El espacio fila de A , subespacio de \mathbf{R}^n , y el espacio columna de A , subespacio de \mathbf{R}^m , tienen la misma dimensión. De hecho, el número r ($r \leq m$ y $r \leq n$) de pivotes de la eliminación gaussiana es esa dimensión común, que se denomina *rango de la matriz* A .
2. La dimensión del subespacio fila de A es r , el número de pivotes o rango de A , y la dimensión del subespacio nulo de A es $n-r$. Su suma es precisamente la dimensión del espacio \mathbf{R}^n que los contiene. En otras palabras, el rango más la nulidad de A es igual a n :

$$\underbrace{\dim(\text{espacio fila de } A)}_r + \underbrace{\dim \mathcal{N}(A)}_{n-r} = n.$$

3. Otra forma de escribir la igualdad anterior es la llamada *igualdad fundamental del Álgebra lineal*: $\underbrace{\dim \mathcal{R}(A)}_r + \underbrace{\dim \mathcal{N}(A)}_{n-r} = \underbrace{\dim \mathbf{R}^n}_n$.

Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1 y, además, la igualdad fundamental es $\underbrace{\dim \mathcal{R}(A)}_1 + \underbrace{\dim \mathcal{N}(A)}_3 = \underbrace{n}_{4}$ columnas. Una curiosidad

sobre esta matriz A : el hecho de que el rango de A sea 1 y que, por tanto, sólo un vector fila, por ejemplo el primero, sea base del espacio fila, permite

escribir A en una forma muy peculiar: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u} \mathbf{v}^t$;

donde el vector fila $\mathbf{v}^t = (0 \ 1 \ 4 \ 0)$ es la base del espacio fila de A y el

vector columna $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ contiene los escalares que se necesitan para construir las filas de A a partir del vector básico elegido.

Otro ejemplo: en el ejercicio 8 hemos comprobado que las siguientes matrices son equivalentes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -8 & 5 & -5 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Eliminación gaussiana}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

- El subespacio fila de A está en \mathbf{R}^5 . Una base del mismo está formada por las dos filas de U no nulas: $\{(1, -2, 0, 0, 1), (0, 0, -1, 1, -2)\}$; luego $\dim(\text{espacio fila de } A) = 2$.
- El espacio nulo o núcleo de A está en \mathbf{R}^5 . Una de sus bases está formada por los vectores $\{(2, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0), (-1, 0, -2, 0, 1)\}$; así que $\dim \mathcal{N}(A) = 3$.
- El espacio columna o recorrido de A está en \mathbf{R}^3 . Una de sus bases son las columnas de A que ocupan el lugar de los pivotes: $\{(1, 3, 4), (0, -1, 5)\}$; y $\dim \mathcal{R}(A) = 2$.

Obsérvese que $\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A) = 3 + 2 = 5 = \dim \mathbf{R}^5$ y que los vectores de la base del espacio fila son ortogonales a los de la base del espacio nulo.

Dediquemos unas líneas a las matrices cuadradas y a su rango. Supongamos que la matriz A es cuadrada, digamos de orden n , ¿qué significa que el rango de A sea el máximo posible, es decir, que sea n ? La respuesta no es ninguna novedad, pues esta pregunta es la misma que ya hemos respondido en páginas anteriores y que decía: ¿hay alguna relación entre la dimensión del espacio columna de A y su inversibilidad? Seguro que el lector recuerda perfectamente la respuesta. La incluimos en la siguiente propiedad en la que además hay otras caracterizaciones de la inversibilidad de una matriz cuadrada.

Propiedad: Para una matriz A , cuadrada de orden n , son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- A tiene inversa.
- La única solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la nula, es decir, $\dim \mathcal{N}(A) = 0$.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema compatible determinado para todo \mathbf{b} , es decir, $\dim \mathcal{R}(A) = n$.
- El rango de A es n .

Finalmente, vamos a sacar partido del estudio que hemos realizado de los subespacios asociados a una matriz; en especial de cómo hemos aprendido a obtener bases del espacio columna y del espacio fila. En ambos casos, el punto de partida era un sistema generador del subespacio y se consiguió extraer o construir una base.

Como consecuencia del estudio del espacio columna de una matriz, disponemos del siguiente método práctico para extraer una base de un sistema generador.

Un algoritmo o método para obtener una base del espacio generado por un conjunto de vectores: Se puede determinar una base del subespacio generado por $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \subseteq \mathbf{R}^m$ como sigue:

1. Forme la matriz A cuyas columnas sean los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.
2. Reduzca A mediante eliminación gaussiana a una forma escalonada U e identifique las columnas pivote.
3. Las columnas pivote de A forman una base del subespacio generado por \mathcal{S} .

Observaciones al método:

- a. *Ventajas* de la base construida: Todos los vectores de esta base están en el sistema generador \mathcal{S} .
- b. *Desventajas:* Los vectores de la base construida no son en general vectores sencillos, en el sentido de que posiblemente no tengan muchas componentes cero.

Ejercicio 12: Hallar la dimensión y una base del subespacio de \mathbf{R}^4 generado por los vectores: $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 4, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 3, -4, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (4, 2, -3, 3)$ y $\mathbf{v}_4 = (6, 4, 2, 4)$.

Podemos actuar de manera que el subespacio indicado sea el espacio columna de una matriz, para ello formamos la matriz cuyas columnas son los vectores dados y tras aplicar la eliminación gaussiana llegaremos a conocer una base y la dimensión del espacio descrito.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & -4 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ la matriz que contiene como columnas a los

vectores dados. Una vez aplicada la eliminación de Gauss-Jordan llegamos a la

matriz $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con pivotes en las cuatro columnas. Por tanto, las

cuatro columnas de A , son linealmente independientes, es decir, el subespacio generado por los vectores dados es \mathbf{R}^4 .

Dejamos planteada una pregunta: ¿tiene inversa la matriz A ?

Ejercicio 13: Completa el sistema $\{\mathbf{u}=(1,1,1), \mathbf{v}=(1,2,3)\}$, de vectores linealmente independientes, hasta conseguir una base de \mathbf{R}^3 .

Los vectores columna de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ forman un sistema

generador de \mathbf{R}^3 , el truco ha consistido en añadir al sistema los tres vectores de la base usual de \mathbf{R}^3 . Extraer de este sistema una base que contenga a los dos primeros vectores es tan fácil como aplicar la eliminación gaussiana a la matriz A y observar cuáles son las columnas pivote.

La forma escalonada, equivalente a A , es $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Las

columnas pivote son las tres primeras; en consecuencia, añadiendo el vector $\mathbf{w} = (1,0,0)$ al sistema $\{\mathbf{u}=(1,1,1), \mathbf{v}=(1,2,3)\}$ conseguimos una base de \mathbf{R}^3 .

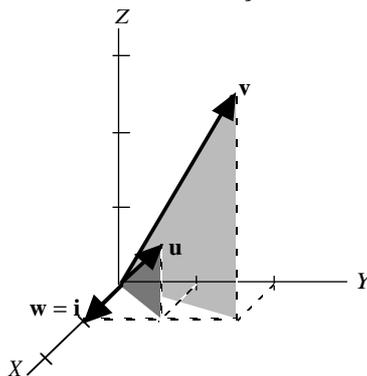


FIGURA 15: Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} junto con $\mathbf{w} = \mathbf{i}$ forman una base del espacio \mathbf{R}^3 .

Análogamente, la forma en que sabemos conseguir una base del espacio fila de una matriz es otro método práctico (el anterior se sustentaba en el conocimiento de bases del espacio columna) para construir bases de un subespacio. El método nuevo dice:

Algoritmo o método para obtener una base del espacio generado por un conjunto de vectores: Se puede determinar una base del subespacio generado por $\mathcal{S} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\} \subseteq \mathbf{R}^n$ como sigue:

1. Formar la matriz A cuyas filas sean los vectores $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$.
2. Reducir A mediante eliminación gaussiana a una forma escalonada U .
3. Las filas no nulas de U forman una base del subespacio generado por \mathcal{S} .

Observaciones al método:

- a. *Ventajas* de la base construida: Los vectores de esta base son «fáciles» de manejar, pues hay varios ceros en sus componentes.
- b. *Desventajas*: Los vectores de la base construida no son, en general, vectores del sistema generador \mathcal{S} , es decir, no se ha tratado de reducir un sistema generador a base eliminando los vectores que sobren.
- c. *Cuestión*: Quizás el lector se esté preguntando: «Si, por ejemplo, las r primeras filas de U son sus filas no nulas y, por tanto, constituyen una base del subespacio generado por \mathcal{S} , ¿también las r primeras filas de A forman una base del subespacio generado por \mathcal{S} ?» Es una cuestión muy interesante, su respuesta se puede alcanzar tras una pausada reflexión. Animamos al lector a que deduzca la respuesta.

Ejercicio 14: Hallar una base del subespacio de \mathbf{R}^4 generado por los vectores: $\mathbf{v}_1 = (2,1,1,2)$, $\mathbf{v}_2 = (0,3,2,1)$, $\mathbf{v}_3 = (4,0,4,4)$ y $\mathbf{v}_4 = (2,9,3,4)$.

Podemos actuar de dos formas distintas: bien estudiamos el espacio fila de la matriz cuyas filas son los vectores dados, o bien estudiamos el espacio columna de la matriz cuyas columnas son los vectores dados como hicimos en páginas anteriores. De cualquier forma, y tras aplicar la eliminación gaussiana, llegaremos a conocer una base y la dimensión del espacio descrito.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ la matriz que contiene como filas a los vectores

dados. Una vez aplicada la eliminación gaussiana llegamos a la matriz triangular superior: $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cuyas filas no nulas son base del espacio

fila de U y del espacio fila de A . Nótese que se ha construido una base $\{\mathbf{f}_1 = (2,1,1,2), \mathbf{f}_2 = (0,3,2,1), \mathbf{f}_3 = (0,0,5,1)\}$ bastante sencilla del subespacio de \mathbf{R}^4 generado por los vectores dados, pues esos vectores básicos contienen varias componentes nulas.

Dos preguntas sobre este ejercicio para que las conteste el lector:

La primera, ¿sería capaz de conseguir una base con vectores todavía más sencillos (sencillos en el sentido de que tengan más componentes nulas)?; una pista para responder a esta pregunta: no hay que conformarse con hacer ceros sólo debajo de los pivotes.

La segunda, sin pista, ¿es inversible la matriz A ?