Programación Lineal II. Teoría de la dualidad

P.M. Mateo y David Lahoz

27 de mayo de 2009

Este tema continúa el desarrollo iniciado en el tema 1. En el se define el problema dual asociado a un problema de programación lineal (problema primal), mostrando ejemplos de problemas en los que al modificar los planteamientos aparece un nuevo problema de programación lineal que resulta ser el problema dual del problema planteado inicialmente. Tras esto, se desarrollan todos los teoremas habituales sobre las relaciones existentes entre un problema primal y su dual desembocando en el enunciado y demostración del teorema fundamental de la dualidad y el teorema de la holgura complementaria. A continuación se muestra la utilidad de alguno de estos resultados por medio de una serie de ejemplos y se continúa dedicando un pequeño epigrafe a la interpretación del valor de las variables del problema dual en el óptimo, mostrando como se establecen los precios sombra de los recursos de un problema de programación lineal. Finalmente se presenta el desarrollo del algoritmo del simplex dual.

Índice

1. Introducción

La teoría de la dualidad nos va a permitir, entre otras cosas, relacionar cada problema de programación lineal con otro denominado problema dual y obtener relaciones sobre el tipo de soluciones de ambos problemas, también nos va a proporcionar herramientas alternativas a las ya conocidas para comprobar la optimalidad de soluciones, así como condiciones que pueden utilizarse para el desarrollo de nuevos algoritmos de resolución, etc.

A continuación vamos a enunciar y plantear un problema de producción en términos de programación lineal y posteriormente plantearemos una nueva situación en la que, de una forma natural, surge el planteamiento del problema dual asociado al problema primal (original) planteado.

Una empresa internacional produce y vende estos dos tipos de supercomputadores: el 4MX500Mhz y el NMX800Mhz. En la elaboración de ambos tipos de equipos hay que destacar dos procesos, el de ensamblado final y el de empaquetado, procesos P_1 y P_2. Esta empresa dispone mensualmente de 2000 horas dedicadas al proceso de ensamblado y 1000 horas dedicadas al proceso de empaquetado, además saben que los tiempos requeridos para realizar dichas operaciones para cada uno de los tipos de supercomputadores son los que se muestran en la tabla siguiente:

Proceso	Horas requeridas 4MX500Mhz	Horas requeridas NMX800Mhz	Horas mensuales disponibles
P_1	6	4	2000
P_2	2	4	1000

El beneficio neto obtenido tras la venta de un supercomputador de tipo 4MX500Mhz es de 400 u.m. y tras la venta de una unidad de NMX800Mhz es de 600 u.m.. Con esta información planteamos y resolvemos inicialmente un problema que permita determinar el número de unidades de cada tipo de ordenador con objeto de maximizar el beneficio total.

Definimos las variables x_1 y x_2 como el número de ordenadores elaborados de tipo 4MX500mhz y NMX800Mhz respectivamente, con estas variables el problema queda:

$$
\begin{aligned}
&\text{máx } Z = 400x_1 + 600x_2 \\
&\text{s. a:} \\
&\qquad 6x_1 + 4x_2 \leq 2000 \\
&\qquad 2x_1 + 4x_2 \leq 1000 \\
&\qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

La solución óptima de dicho problema es elaborar 250 unidades del tipo 4MX500Mhz y 125 unidades del tipo NMX800Mhz con un beneficio de 175000 u.m.

Ahora cambiamos el enfoque sobre el problema planteado, nuestro propósito va a ser determinar los precios a los cuales esta empresa debería valorar sus recursos (horas de trabajo de los dos procesos) de tal manera que puedan determinar el mínimo valor total al cual estaría dispuesta a arrendar o vender los recursos.

Sean y_1 e y_2, la renta percibida por hora de los procesos P_1 y P_2 respectivamente. La renta total obtenida será pues, $2000y_1 + 1000y_2$. Se desea como objetivo encontrar el mínimo valor de $2000y_1 + 1000y_2$ de modo que la empresa pueda, de una manera inteligente, analizar algunas propuestas de alquiler o compra de todos los recursos como un paquete total.

Se consideran las condiciones siguientes, los precios pagados por el alquiler serán no negativos, es decir $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$. Además los precios y_1 e y_2 deben ser competitivos con las alternativas disponibles, es decir, el beneficio que la empresa debe obtener por los recursos necesarios para elaborar un supercomputador al menos deben ser iguales a los que obtendría al utilizar dichos recursos en la elaboración del computador, es decir, para el 4MX500Mhz tendremos $6y_1 + 2y_2 \geq 400$ y para el NMX800Mhz queda $4y_1 + 4y_2 \geq 600$. Con esto garantiza la obtención de precios con los que al menos iguala el beneficio obtenido al producir él mismo los equipos. El problema planteado queda:

$$
\begin{array}{lll}
\text{mín } Z & = & 2000y_1 + 1000y_2 \\
\text{s. a:} & & \\
 & & 6y_1 + 2y_2 \geq 400 \\
 & & 4y_1 + 4y_2 \geq 600 \\
 & & y_1 \geq 0, \;\; y_2 \geq 0
\end{array}
$$

La resolución de este problema proporciona un valor de 25 para cada unidad del primer recurso y un valor de 125 para cada unidad del segundo, con un beneficio de 175000, igual al obtenido en el planteamiento del primer problema. Este nuevo problema es problema dual del problema planteado originalmente.

2. El problema dual

Como ya hemos comentado, asociado a un problema de programación lineal aparece otro problema de programación lineal denominado *problema dual* (asociado al primero), en general nos referiremos al primero como *problema primal* y lo denotaremos mediante [P], y al segundo como problema dual y lo denotaremos con [D].

Definición 1. *Un problema de programación lineal se dice que está en forma simétrica si todas las variables están restringidas a ser no negativas y todas las restricciones son de tipo "$\leq$" en el caso de máximo y de tipo "$\geq$" en el caso de mínimo, es decir, toman la forma:*

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & Z = \mathbf{cx} \\ \textit{s. a:} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} \text{mín} & Z = \mathbf{cx} \\ \textit{s. a:} & A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Definición 2. *Dado un problema de programación lineal en forma simétrica de máximo*

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & Z = \mathbf{cx} \\ [P]\ \textit{s. a:} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

entonces su problema dual asociado es

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & G = \mathbf{b}'\mathbf{y} \\ [D]\ \textit{s. a:} & A'\mathbf{y} \geq \mathbf{c}' \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

donde $\mathbf{y}$ *es un vector de* m *componentes, (tantas como restricciones en el problema primal).*

En general puede definirse el problema dual de uno dado, para cualquier problema de programación lineal, y posteriormente extender la definición al resto de problemas de programación lineal. La elección del problema de programación lineal en forma simétrica de máximo como problema de referencia ha sido únicamente por comodidad en algunos de los desarrollos posteriores.

En la siguiente proposición se muestra como quedan los problemas duales de algunos problemas de programación lineal:

Proposición 1. *Se cumplen las siguientes reglas para la construcción de problemas duales:*

i) El problema

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & Z = \mathbf{cx} \\ [P]\ \textit{s. a:} & A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \textit{se dualiza en} \qquad \begin{array}{ll} \text{máx} & G = \mathbf{b}'\mathbf{y} \\ [D]\ \textit{s. a:} & A'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}' \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

En consecuencia el problema dual del problema dual es el problema primal.

ii) El problema

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & Z = \mathbf{cx} \\ [P]\ \textit{s. a:} & A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \textit{se dualiza en} \qquad \begin{array}{ll} \text{mín} & G = \mathbf{b}'\mathbf{y} \\ [D]\ \textit{s. a:} & A'\mathbf{y} \geq \mathbf{c}' \\ & \mathbf{y} \leq \mathbf{0}. \end{array}$$

iii) El problema

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & Z & = \mathbf{cx} \\ [P] \ \textit{s. a:} & & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} \leq \mathbf{0} \end{array} \quad \textit{se dualiza en} \quad \begin{array}{lll} \text{mín} & G & = \mathbf{b}'\mathbf{y} \\ [D] \ \textit{s. a:} & & A'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}' \\ & & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

iv) El problema

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & Z & = \mathbf{cx} \\ [P] \ \textit{s. a:} & & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad \textit{se dualiza en} \quad \begin{array}{lll} \text{mín} & G & = \mathbf{b}'\mathbf{y} \\ [D] \ \textit{s. a:} & & A'\mathbf{y} \geq \mathbf{c}' \\ & & \mathbf{y} \ \textit{no restringidas en signo.} \end{array}$$

v) El problema

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & Z & = \mathbf{cx} \\ [P] \ \textit{s. a:} & & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} \ \textit{no restringidas en signo} \end{array} \quad \textit{se dualiza en} \quad \begin{array}{lll} \text{mín} & G & = \mathbf{b}'\mathbf{y} \\ [D] \ \textit{s. a:} & & A'\mathbf{y} = \mathbf{c}' \\ & & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

vi) Etc. ...

Demostración. Vamos a demostrar dos de los casos, el resto se realizaría de una forma similar, la idea es transformar el problema en un problema para el cual conozcamos su dual.

i) Vamos a transformar el problema i) para que sea un problema de máximo con restricciones de tipo '$\leq$' y con variables no negativas, para ello basta con cambiar de signo la función objetivo y con multiplicar por -1 cada una de las restricciones del problema, es decir,

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & Z & = \mathbf{cx} \\ \text{s. a:} & & A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lll} \text{máx} & (-Z) & = -\mathbf{cx} \\ \text{s. a:} & & -A\mathbf{x} \leq -\mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Este problema ya se ajusta a la definición sobre dualidad dada inicialmente, y su dual es

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & G & = -\mathbf{b}'\mathbf{y} \\ \text{s. a:} & & -A'\mathbf{y} \geq -\mathbf{c}' \\ & & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

que de una manera directa queda

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & G & = \mathbf{b}'\mathbf{y} \\ \text{s. a:} & & A'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}' \\ & & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

iv) Para acomodar este caso a la definición vamos a transformar las restricciones de igualdad en desigualdades de tipo '$\leq$', en primer ponemos $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ como $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ y $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$, o equivalentemente, $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ y $-A\mathbf{x} \leq -\mathbf{b}$. Así el problema queda

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & Z = \mathbf{cx} \\ \text{s. a:} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & -A\mathbf{x} \leq -\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array} \iff \begin{array}{ll} \text{máx} & Z = \mathbf{cx} \\ \text{s. a:} & \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

este problema ya está en forma simétrica, y podemos escribir su problema dual que queda

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & G = (\mathbf{b}', \ -\mathbf{b}')\mathbf{y} \\ \text{s. a:} & (A', -A')\mathbf{y} \geq \mathbf{c}' \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \end{array}$$

donde $\mathbf{y}$ es un vector de $2m$ componentes, las correspondientes a las filas de A $(y_i, \ i = 1, \ldots, m)$ y las correspondientes a la parte de $-A$, $(y_i, \ i = m+1, \ldots, 2m)$. A continuación vamos a realizar un cambio de formato a este problema hasta que nos conduzca a la formulación planteada en el enunciado de la proposición.

Si nos fijamos en una variable y_i $(1 \leq i \leq m)$ y en la correspondiente en la parte de $-A$, es decir la y_j con $j = i + m$ sus coeficientes son, b_i para y_i y $b_j = -b_i$ para y_j, por tanto en la función objetivo podríamos agruparlas poniendo $b_i(y_i - y_{i+m})$. Análogamente si nos fijamos en la parte de las restricciones, una variable y_i y la y_{i+m} tienen, en una restricción j cualquiera, coeficientes a_{ij} y $-a_{ij}$ respectivamente, por lo que también podremos poner $a_{ij}(y_i - y_{i+m})$. En vista de estos hechos podemos definir una variable $v_i = y_i - y_{i+m}$ que por construcción sería no restringida en signo con la que, sustituyéndola en el problema anterior, obtendríamos

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & G = \mathbf{b}'\mathbf{v} \\ \text{s. a:} & A'\mathbf{v} \geq \mathbf{c}' \\ & \mathbf{v} \text{ no restringida,} \end{array}$$

donde $\mathbf{v}$ es un m-vector de variables no restringidas en signo, con lo que se demuestra el apartado de la proposición.

$\square$

De la proposición anterior se pueden extraer las siguientes ideas:

1. Si el problema primal es de máximo el dual es de mínimo y, recíprocamente, si el problema primal es de mínimo su dual es de máximo.

2. La matriz de coeficientes del problema dual es la traspuesta de la matriz de coeficientes del problema original.

3. El vector de costos del problema dual es el vector de recursos del problema primal (original).

4. El vector de recursos del problema dual es el vector de costos del problema primal.

5. Cada restricción del problema primal da lugar a una variable en el problema dual y, cada variable en el primal da lugar a una restricción del problema dual.

Tras estos comentarios proporcionamos una tabla resumen en la que se pueden obtener todas las reglas de dualización, tanto para problemas de máximo como de mínimo, restricciones de igualdad, desigualdad, etc.

Primal (Dual)		Dual (Primal)
máx	———	mín
Restricción "$\leq$"	———	Variable "≥ 0"
Restricción "$=$"	———	Variable no restringida
Restricción "$\geq$"	———	Variable "≤ 0"
Variable "≥ 0"	———	Restricción "$\geq$"
Variable no restringida	———	Restricción "$=$"
Variable "≤ 0"	———	Restricción "$\leq$"

Si el problema primal es de máximo se lee de izquierda a derecha y, en caso contrario, problema primal de mínimo, de derecha a izquierda.

Veamos algunos ejemplos de dualización:

$$\begin{array}{lcl} \text{máx } Z & = & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s. a:} & & x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 7 \\ [P] & & x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \\ & & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \text{mín } G & = & 7y_1 + 8y_2 \\ \text{s. a:} & & y_1 + y_2 \geq 3 \\ [D] & & 2y_1 + y_2 \geq 2 \\ & & -y_1 + y_2 \leq 4 \\ & & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{mín } Z & = & 3x_1 + 7x_2 + x_3 \\ \text{s. a:} & & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7 \\ [P] & & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 8 \\ & & 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ & & x_1 \leq 0,\ x_2 \text{ no restringida,} \\ & & x_3 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \text{máx } G & = & 7y_1 + 8y_2 + 5y_3 \\ \text{s. a:} & & y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ [D] & & 2y_1 + 3y_2 + y_3 = 7 \\ & & y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 1 \\ & & y_1 \leq 0,\ y_2 \geq 0, \\ & & y_3 \text{ no restringida} \end{array}$$

3. Teoremas relativos a problemas primales y sus duales asociados

Mientras no se indique lo contrario vamos a trabajar con los siguientes problema primal y dual:

$$\begin{array}{lcl} \text{máx } Z & = & \mathbf{cx} \\ [P] & & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \text{mín } G & = & \mathbf{b}'\mathbf{y} \\ [D] & & A'\mathbf{y} \geq \mathbf{c}' \\ & & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Teorema **1** (De la dualidad débil). *Si $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ son soluciones factibles de un par de problemas primal y dual [P] y [D], respectivamente, entonces se verifica*

$$Z(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b}'\bar{\mathbf{y}} = G(\bar{\mathbf{y}})$$

Es decir, para cualquier par de soluciones factibles de un problema primal y su dual el valor de la función objetivo del problema de máximo es menor o igual que el valor de la función objetivo del problema de mínimo.

Demostración. Por ser $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ factibles se tiene que

$$\begin{array}{c} A\bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} A'\bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{c}' \\ \bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Multiplicando a izquierda la primera expresión por $\bar{\mathbf{y}}'$ y la segunda por $\bar{\mathbf{x}}'$, y trasponiendo ésta última obtenemos

$$\bar{\mathbf{y}}'A\bar{\mathbf{x}} \leq \bar{\mathbf{y}}'\mathbf{b} \qquad\qquad \bar{\mathbf{y}}'A\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}}$$

Observando lo anterior:

$$\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} \leq \bar{\mathbf{y}}'A\bar{\mathbf{x}} \leq \bar{\mathbf{y}}'\mathbf{b} = \mathbf{b}'\bar{\mathbf{y}}$$

□

COROLARIO **1.** *El valor de la función objetivo del problema primal de máximo para cualquier solución factible es una cota inferior del mínimo valor de la función objetivo del dual, y reciprocamente, el valor de la función objetivo del problema dual de mínimo para cualquier solución factible dual es una cota superior del máximo valor de la función objetivo del primal.*

COROLARIO **2.** *Si el problema primal es factible y su solución es no acotada, ($Z \to \infty$), entonces el problema dual no tiene solución. Análogamente, si el problema dual es factible pero con solución no acotada, ($G \to -\infty$), entonces el problema primal no tiene solución factible.*

TEOREMA **2** (Criterio de Optimalidad)**.** *Si existen soluciones factibles para los problemas primal y dual [P] y [D] tales que los valores correspondientes de las funciones objetivo coinciden, entonces dichas soluciones factibles son óptimas para sus respectivos problemas.*

Demostración. Sean $\mathbf{x}^*$ e $\mathbf{y}^*$ factibles para los problemas [P] y [D] respectivamente, y tal que $\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}'\mathbf{y}^*$. Sea $\mathbf{x}$ cualquier solución factible del problema primal [P], por el teorema 1 se tiene que

$$\mathbf{c}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}'\mathbf{y}^* = \mathbf{c}\mathbf{x}^*$$

y por lo tanto $\mathbf{x}^*$ es una solución óptima del problema primal [P]. Un argumento análogo prueba la optimalidad de $\mathbf{y}^*$ para el problema dual [D]. □

Consideremos ahora el problema primal en forma estándar y su dual asociado.

$$\begin{array}{llcll} \text{mín} & Z = \mathbf{c}\mathbf{x} & \qquad & \text{máx} & G = \mathbf{b}'\mathbf{y} \\ [P] \text{ s a:} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} & & [D] \text{ s a:} & A'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}' \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & & & \mathbf{y} \text{ no restringida} \end{array}$$

TEOREMA **3.** *Sea $\mathbf{x}^*$ una SFB óptima de [P] y sea B la matriz asociada a su base, entonces $\pi = \mathbf{c}_B B^{-1}$ es una solución óptima del problema dual [D].*

Demostración. Como $\mathbf{x}^*$ es una SFB óptima entonces $\mathbf{x}_B^* = B^{-1}\mathbf{b} \geq 0$ y $c_j - \mathbf{c}_B B^{-1} A_j \geq 0 \ \forall j$, ahora bien, $c_j - \mathbf{c}_B B^{-1} A_j = c_j - \pi A_j \geq 0 \ \forall j$ que en forma matricial y operando toma la forma $A'\pi' \leq \mathbf{c}'$ y por tanto π' es una solución factible del problema dual [D]. Además

$$G = \mathbf{b}'\pi' = \pi\mathbf{b} = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B^* = Z^*$$

y por el teorema 2, la solución π es una solución óptima de [D]. □

COROLARIO **3.** *Si el problema primal tiene solución óptima finita entonces el problema dual también, y recíprocamente, si el problema dual tiene solución óptima finita entonces el primal también.*

COROLARIO **4.** *Si el problema primal es no factible entonces su dual o no tiene solución o tiene solución no acotada, y recíprocamente, si el dual es no factible entonces el primal o es no factible o tiene solución no acotada.*

Demostración. Veamos el primer caso (problema primal no factible), el segundo es análogo. Si el problema dual es no factible el corolario se verifica, veamos que en caso contrario se ha de cumplir obligatoriamente que el problema dual tiene solución no acotada. Supongamos que no fuera así, es decir, que el problema dual es factible y tiene solución óptima (finita), entonces por el teorema anterior dada la solución ótima del dual podríamos construir una solución factible (y óptima) del primal, con lo que obtenemos una contradicción ya que el problema primal es no factible, por tanto el problema dual si es factible debe tener solución no acotada. □

Observaciones: Si se ha utilizado el algoritmo del simplex para la resolución de un problema de programación lineal entonces el valor óptimo de las variables del problema dual se encuentra en las Z_j correspondientes a las variables de la primera base. Basta para ello con notar que la primera base tiene matriz B asociada igual a la identidad y por tanto se verifica:

$$\begin{aligned}\pi = \quad & \mathbf{c}_B B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \\ = & \left(\mathbf{c}_B B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_B B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{c}_B B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (Z_{j_1}, Z_{j_2}, \dots, Z_{j_m})\end{aligned}$$

y por tanto

$$(\pi_1, \pi_2, \dots, \ \pi_m) = (Z_{j_1}, Z_{j_2}, \dots, Z_{j_m})$$

Como resumen de todos los elementos anteriores enunciamos el resultado conocido como *teorema fundamental de la dualidad*

TEOREMA **4** (Teorema fundamental de la dualidad). *Dado un problema primal y su dual sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta:*

P tiene solución óptima (finita) $\Longleftrightarrow$ [D] tiene solución óptima (finita).

P es no factible $\Longrightarrow$ [D] es no factible o [D] tiene solución no acotada.

D es no factible $\Longrightarrow$ [P] es no factible o [P] tiene solución no acotada.

P tiene solución no acotada $\Longrightarrow$ [D] es no factible.

D tiene solución no acotada $\Longrightarrow$ [P] es no factible.

Para finalizar el apartado vamos a enunciar y demostrar el teorema *de la holgura complementaria*, para ello en primer lugar volveremos a considerar como problemas primal y dual los problemas en forma simétrica de máximo y mínimo respectivamente.

Observación: Dados $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ soluciones factibles para el problema simétrico de máximo y su dual respectivamente, entonces

$$(\bar{\mathbf{y}}'A - \mathbf{c})\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}'(\mathbf{b} - A\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{y}}'\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}'\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}'\mathbf{b} - \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}},$$

donde $\mathbf{u}$ son las variables de holgura del problema primal y $\mathbf{v}$ son las variables de holgura del problema dual.

Para ver la veracidad de las igualdades anteriores basta con las siguientes consideraciones. Dadas $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ se añaden holguras en las restricciones de sus problemas respectivos con lo que:

$$\begin{array}{ll} A\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{b} & \qquad A'\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{c}' \\ \bar{\mathbf{x}},\ \bar{\mathbf{u}}\ \geq 0 & \qquad \bar{\mathbf{y}},\ \bar{\mathbf{v}}\ \geq 0. \end{array}$$

Despejando $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ y sustituyéndolo se obtiene la primera parte de la observación:

$$(\bar{\mathbf{y}}'A - \mathbf{c})\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}'(\mathbf{b} - A\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{y}}'\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}'\bar{\mathbf{x}}$$

Para continuar multiplicamos a izquierda por $\bar{\mathbf{y}}'$ y por $\bar{\mathbf{x}}'$ tal y como se muestra:

$$\begin{array}{l} \bar{\mathbf{y}}'A\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}'\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{y}}'\mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{x}}'A'\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}'\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{x}}'\mathbf{c}' \end{array}$$

Finalmente trasponiendo la segunda expresión y restándolas se obtiene:

$$\bar{\mathbf{y}}'\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}'\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}'\mathbf{b} - \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}}$$

Juntando las expresiones anteriores obtenemos la expresión indicada inicialmente, es decir,

$$(\bar{\mathbf{y}}'A - \mathbf{c})\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}'(\mathbf{b} - A\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{y}}'\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}'\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}'\mathbf{b} - \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}},$$

Esta expresión nos permite demostrar de una manera directa el siguiente e importante resultado

TEOREMA **5** (de la Holgura Complementaria)**.** *Dadas $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ soluciones factibles de los problemas simétrico de máximo y su dual, entonces $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ son soluciones óptimas para sus problemas respectivos si y sólo si se verifica*

$$(\bar{\mathbf{y}}'A - \mathbf{c})\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}'(\mathbf{b} - A\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

Demostración. Teniendo en cuenta la expresión obtenida

$$(\bar{\mathbf{y}}'A - \mathbf{c})\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}'(\mathbf{b} - A\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{y}}'\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}'\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}'\mathbf{b} - \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}},$$

tenemos que, si $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ son soluciones óptimas entonces el valor de la función objetivo para cada uno de estos dos puntos coincide y en consecuencia la última parte de la expresión anterior es cero y por la cadena de igualdades la primera de ellas que es la que corresponde a la del enunciado. Si por el contrario se verifica la expresión del enunciado, entonces por la cadena de igualdades la expresión final es cero, por tanto el valor de la función objetivo coincide y ambas soluciones son óptimas para sus problemas respectivos (teorema 2) □

Nota: las condiciones

$$(\bar{\mathbf{y}}'A - \mathbf{c})\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}'(\mathbf{b} - A\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

se nombrarán como *Condiciones de la Holgura Complementaria* (CHC).

Para finalizar el desarrollo teórico del apartado y antes de ver algunos ejemplos de aplicación de los resultados desarrollados vamos a realizar una nueva transformación de las condiciones del teorema que permiten un manejo más sencillo.

Teniendo en cuenta que si las dos soluciones factibles entonces tanto $\bar{\mathbf{x}}$ como $\bar{\mathbf{y}}$ y las holguras $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ son no negativas y teniendo en cuenta que

$$0 = (\bar{\mathbf{y}}'A - \mathbf{c})\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}'(\mathbf{b} - A\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{y}}'\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}'\bar{\mathbf{x}}$$

se obtiene

$$\bar{\mathbf{y}}'\bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{v}}'\bar{\mathbf{x}} = 0,$$

por la misma razón tenemos que si expresamos estos productos escalares componente a componente, entonces cada uno de los productos está formado por elementos no negativos y su suma es nula por lo que podemos asegurar que

$$\begin{aligned} \bar{x}_j \bar{v}_j &= 0 \ \forall j = 1, \dots, n \\ \bar{y}_i \bar{u}_i &= 0 \ \forall i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Con las CHC expresadas de esta forma podemos reenunciar el teorema de la forma siguiente

Teorema **6** (de la Holgura Complementaria)**.** *Dado $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ soluciones factibles de los problemas simétrico de máximo y su dual, entonces $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{y}}$ son soluciones óptimas para sus problemas respectivos si y sólo si se verifica*

$$\begin{aligned} \bar{x}_j \bar{v}_j &= 0 \ \forall j = 1, \dots, n \\ \bar{y}_i \bar{u}_i &= 0 \ \forall i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$ son las holguras de las restricciones del problema primal y $\bar{\mathbf{v}}$ las holguras correspondientes al problema dual.

Observando esta última forma de las CHC estas se pueden expresar de la forma siguiente:

- Si una variable primal, x_j, es distinta de cero, entonces la correspondiente restricción del dual se verifica con igualdad en el óptimo, $v_j = 0$.
- Si una restricción primal es una desigualdad estricta en el óptimo, $u_i > 0$, entonces la variable dual asociada, y_i, debe tomar valor nulo.
- Si una variable dual y_i, es distinta de cero, entonces la correspondiente restricción del primal se verifica con igualdad en el óptimo, $u_i = 0$.
- Si una restricción dual es una desigualdad estricta en el óptimo, $v_j > 0$, entonces la variable primal asociada, x_j, debe tomar valor nulo.

Finalizamos mostrando la utilización de las condiciones de la holgura complementaria para la determinación de la optimalidad o no de soluciones.

Ejemplos:

Dado el siguiente PPL

$$\begin{array}{lll} \text{mín } Z & = & 100x_1 + 360x_2 + 240x_3 \\ \text{s. a:} & & 1000x_1 + 4000x_2 + 2000x_3 \geq 2000 \\ & & 200x_1 + 900x_2 + 500x_3 \geq 3000 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{array}$$

demostrar que $\mathbf{x} = (0, \frac{30}{9}, 0)$ e $\mathbf{y} = (0, \frac{2}{5})$ son soluciones óptimas de dicho problema y de su dual.

En primer lugar plantearemos el problema dual y comprobaremos que ambas son soluciones factibles (ya que este es el primer requerimiento del THC).

$$\begin{array}{lll} \text{máx } G & = & 2000y_1 + 3000y_2 \\ \text{s. a:} & & 1000y_1 + 200y_2 \leq 100 \\ & & 4000y_1 + 900y_2 \leq 360 \\ & & 2000y_1 + 500y_2 \leq 240 \\ & & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{array}$$

Al evaluar ambas soluciones obtenemos los siguiente valores

$$\begin{array}{l} (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (x_1, x_2, x_3, u_1, u_2) = (0, \frac{30}{9}, 0, \frac{3400}{3}, 0) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{v}) = (y_1, y_2, v_1, v_2, v_3) = (0, \frac{2}{5}, 20, 0, 40), \end{array}$$

como todas las holguras toman valor no negativo, ambas soluciones son factibles. A continuación comprobamos si se cumplen las CHC, es decir: $x_j v_j = 0 \ \forall j$ e $y_i u_i = 0 \ \forall i$.

$$\begin{array}{l} x_1 v_1 = 0 \times 20 = 0 \\ x_2 v_2 = \frac{30}{9} \times 0 = 0 \\ x_3 v_3 = 0 \times 40 = 0 \\ y_1 u_1 = 0 \times \frac{3400}{3} = 0 \\ y_2 u_2 = \frac{2}{5} \times 0 = 0 \end{array}$$

En consecuencia se verifican las condiciones del THC y ambas soluciones son óptimas para sus problemas respectivos.

Sea ahora el siguiente PPL

$$\begin{array}{lll} \text{mín } Z & = & 12x_1 + 10x_2 + 4x_3 \\ \text{s. a:} & & 4x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 5 \\ & & 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ & & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array}$$

¿Es óptima la solución $(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2) = (1, 0, 1, 0, 0)$?

Vamos a aplicar el THC para determinar si esta solución factible es óptima o no. Si fuera solución óptima por el teorema fundamental de la dualidad su dual también tendría solución óptima, y por el THC ésta debería ser solución de las CHC. Por tanto dada esta solución imponemos el cumplimiento de las CHC con la solución factible dada. Si su resolución proporciona alguna solución dual factible, entonces a la solución inicial y a la obtenida se les puede aplicar el THC y concluir que ambas son óptimas para sus problemas respectivos.

Si en la resolución del sistema resultante obtenemos que no existe ninguna solución o que las únicas soluciones duales existentes no son factibles, entonces podremos concluir que la solución primal inicial no es óptima (en caso contrario debería existir una solución factible que junto con ella las verificara).

Veamos como quedan estos desarrollos con nuestro ejemplo:

Escribimos el problema dual e imponemos las CHC:

$$\begin{array}{lll} \text{máx } Z & = & 5y_1 + 3y_2 \\ \text{s .a:} & & 4y_1 + 2y_2 \leq 12 \\ & & 4y_1 + y_2 \leq 10 \\ & & y_1 + y_2 \leq 4 \\ & & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1v_1 = 0 = 1(12 - 4y_1 - 2y_2) \Longrightarrow 12 - 4y_1 - 2y_2 = 0 \\ x_2v_2 = 0 = 0(10 - 4y_1 - y_2) \ \# \\ x_3v_3 = 0 = 1(4 - y_1 - y_2) \Longrightarrow 4 - y_1 - y_2 = 0 \\ y_1u_1 = 0 = y_10 \ \# \\ y_2u_2 = 0 = y_20 \ \# \end{array}$$

El sistema resultante de imponer las CHC es

$$\begin{array}{l} 4y_1 + 2y_2 = 12 \\ y_1 + y_2 = 4, \end{array}$$

cuya resolución proporciona una única solución

$$y_1 = y_2 = 2$$

Que sustituyéndola en el problema dual proporciona $(v_1, v_2, v_3) = (0, 0, 0)$ por lo tanto es factible y podemos aplicarle junto a la solución del problema primal inicial el THC y concluir que ambas soluciones son óptimas para sus problemas respectivos.

Veamos un último ejemplo para concluir el apartado. Sea el PPL:

$$\begin{array}{ll} \text{mín } Z & = 85x_1 + 40x_2 \\ \text{s. a:} & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & 6x_1 + x_2 \geq 12 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 19 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Comprobar si es óptima la solución $\mathbf{x} = (0, 12)$. Calculamos el valor de las holguras del problema primal $\mathbf{u} = (4, 0, 17)$, planteamos el problema dual e imponemos las CHC,

$$\begin{array}{ll} \text{máx } G & = 8y_1 + 12y_2 + 19y3 \\ \text{s. a:} & 2y_1 + 6y_2 + y_3 \leq 85 \\ & y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 40 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1v_1 = 0 = 0 \times v_1 \ \# \\ x_2v_2 = 0 = 12 \times v_2 \implies v_2 = 40 - y_1 - y_2 - 3y_3 = 0 \\ y_1u_1 = 0 = y_1 \times 4 \implies y_1 = 0 \\ y_2u_2 = 0 = y_2 \times 0 \ \# \\ y_3u_3 = 0 = y_3 \times 17 \implies y_3 = 0 \end{array}$$

Sustituyendo y_1 e y_3 en la expresión $40 - y_1 - y_2 - 3y_3 = 0$ obtenemos $y_2 = 40$, por tanto $\mathbf{y} = (0, 40, 0)$ es la única solución que junto a la inicial verifica las CHC. Como la solución encontrada no es factible, ya que, $v_1 = -155$, podemos concluir que la solución $\mathbf{x} = (0, 12)$ no es óptima.

Sobre este mismo ejemplo comprobar si la solución $\mathbf{x} = (1, 6)$ es óptima.

Calculando el valor de las holguras primales $\mathbf{u} = (0, 0, 0)$, las CHC toman la forma siguiente:

$$\begin{array}{l} x_1v_1 = 1(85 - 2y_1 - 6y_2 - y_3) = 0 \implies 2y_1 + 6y_2 + y_3 = 85 \\ x_2v_2 = 6(40 - y_1 - y_2 - 3y_3) = 0 \implies y_1 + y_2 + 3y_3 = 40 \\ y_1u_1 = y_10 = 0 \ \# \\ y_2u_1 = y_20 = 0 \ \# \\ y_3u_1 = y_30 = 0 \ \# \end{array}$$

Tras imponer su cumplimiento obtenemos que debe verificarse que

$$\begin{array}{l} 2y_1 + 6y_2 + y_3 = 85 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 = 40 \end{array}$$

Si existe alguna solución de dicho sistema que sea factible dual, junto con la solución primal factible proporcionada $\mathbf{x} = (1, 6)$, estarán en condiciones de aplicar el THC y concluir que ambas soluciones son óptimas para sus problemas respectivos.

Vamos a buscar soluciones del sistema anterior. Tomando y_2 como un parámetro que inicialmente restringimos únicamente a $y_2 \geq 0$ obtenemos

$$\begin{array}{l} y_1 = 43 - \frac{17}{5} y_2 \\ y_2 = y_2 \geq 0 \\ y_3 = -1 + \frac{4}{5} y_2 \end{array}$$

Puede comprobarse sin dificultad que y_1, y_2 e y_3 definidas en los términos anteriores verifican las restricciones del problema dual, únicamente quedará por garantizar la no negatividad de y_1 e y_3, para lo cual deberá cumplirse que

$$\begin{array}{l} 43 - \frac{17}{5} y_2 \geq 0 \Longrightarrow \; y_2 \leq \frac{215}{17} \\ -1 + \frac{4}{5} y_2 \geq 0 \Longrightarrow \; y_2 \geq \frac{5}{4} \end{array}$$

Por tanto cualquier solución de la forma

$$\begin{array}{l} y_1 = 43 - \frac{17}{5} y_2 \\ y_2 \\ y_3 = -1 + \frac{4}{5} y_2 \end{array}$$

con $y_2 \in [\frac{5}{4}, \frac{215}{17}]$ es factible dual y por lo tanto la solución inicial proporcionada y cualquiera de las soluciones duales obtenidas son, por el THC, soluciones óptimas de sus problemas respectivos.

En este ejemplo nos hemos encontrado con que la solución óptima del problema primal era degenerada, sólo 2 variables toman valor no nulo, y en consecuencia en el problema dual existe solución múltiple.

4. Interpretación económica de las variables duales en el óptimo

Por el teorema fundamental de la dualidad los valores óptimos de las funciones objetivo de un problema primal [P] y su dual [D] son iguales, si $\bar{\mathbf{x}}$ es una SFB óptima no degenerada de [P] e $\bar{\mathbf{y}}$ es la solución óptima de [D] (calculada como $\bar{\mathbf{y}}' = \pi = \mathbf{c_B} B^{-1}$) podremos escribir:

$$Z(\bar{\mathbf{x}}) = c_1\bar{x}_1 + c_1\bar{x}_2 + \ldots + c_1\bar{x}_n = \bar{y}_1 b_1 + \bar{y}_2 b_2 + \ldots + \bar{y}_m b_m = G(\bar{\mathbf{y}})$$

Supongamos ahora que modificamos el recurso, por ejemplo, b_1 en una cantidad Δb_1 "pequeña", de manera que la solución primal se siga manteniendo factible, y en consecuencia óptima (observese que $\mathbf{c} - \mathbf{c_B} B^{-1} A$ no varía). Es decir, de manera tal que

$$B^{-1}(\mathbf{b} + \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) \geq \mathbf{0}$$

Consideremos ahora los problemas [P1] y [D1], donde [P1] es el problema primal en el que se ha cambiado $\mathbf{b}$ por $\mathbf{b} + (\, \Delta b_1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0\,)'$ y [D1] es su dual. La solución óptima de [P1], $\tilde{\mathbf{x}}$, tiene la mismas variables básicas que $\bar{\mathbf{x}}$ (por la elección de Δb_1) y el valor que toma la parte básica de dicha solución es $\tilde{\mathbf{x}}_B = B^{-1}[\mathbf{b} + (\, \Delta b_1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0\,)']$, por otro lado la solución de [D1] es $\tilde{\mathbf{y}}' = \pi = \mathbf{c_B} B^{-1}$, observad que como las variables básicas de $\tilde{\mathbf{x}}$ no han cambiado entonces B sigue siendo la misma que antes y $\tilde{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}}$, teniendo en cuenta estos hechos tenemos que:

$$\begin{aligned} Z(\tilde{\mathbf{x}}) &= c_1\tilde{x}_1 + c_1\tilde{x}_2 + \ldots + c_1\tilde{x}_n = \tilde{y}_1(b_1 + \Delta b_1) + \tilde{y}_2 b_2 + \ldots + \tilde{y}_m b_m = \\ &= (\bar{y}_1 b_1 + \bar{y}_2 b_2 + \ldots + \bar{y}_m b_m) + \bar{y}_1 \Delta b_1 = G(\bar{\mathbf{y}}) + \bar{y}_1 \Delta b_1 = Z(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{y}_1 \Delta b_1 \end{aligned}$$

es decir

$$Z(\tilde{\mathbf{x}}) = Z(\bar{\mathbf{x}}) + \bar{y}_1 \Delta b_1$$

De esta expresión se desprende que el valor óptimo de la variable dual $\bar{y}_1$ asociada a la primera restricción del problema primal representa la cantidad en la que se modifica el valor de la función objetivo de [P] por cada unidad adicional de recurso 1 (siempre que la modificación mantenga la base óptima). Esto puede hacerse en general para cualquier recurso b_i del problema primal. Teniendo en cuenta esto, si nos situamos, por ejemplo, en un problema primal de máximo con restricciones de tipo $\leq$, lo resolvemos y calculamos la solución del problema dual, entonces los valores óptimos de las variables duales (que son ≥ 0) representan la variación unitaria de la función objetivo del primal por cada unidad adicional del recurso correspondiente que pudieramos conseguir. Esto nos permite también interpretar dichos valores como la mayor cantidad que estaríamos dispuestos a pagar por una unidad adicional de recurso.

Veamos un ejemplo en el que se pone de manifiesto las ideas anteriores. Supongamos que hemos resuelto el siguiente PPL,

$$
\begin{array}{ll}
\text{máx } Z & = 5x_1 + 10x_2 \\
\text{s. a:} & 2x_1 + x_2 \leq 500 \\
 & 2x_1 + 5x_2 \leq 1000 \\
 & 2x_1 + 3x_2 \leq 900 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Obteniendo la siguiente tabla óptima:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	$\frac{5}{8}$	-$\frac{1}{8}$	0	187.5
x_2	0	1	-$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	125
x_5	0	0	-$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	1	150
	0	0	-$\frac{5}{8}$	-$\frac{15}{8}$	0	

con un valor de la función objetivo de 2187.5, y con $\pi = \mathbf{c}_B B^{-1} = (\frac{5}{8}, \frac{15}{8}, 0)$

Realizamos una modificación "pequeña" del segundo recurso $\tilde{b}_2 = b_2 + 250$, con esta modificación la tabla quedará

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	$\frac{5}{8}$	-$\frac{1}{8}$	0	156.25
x_2	0	1	-$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	187.5
x_5	0	0	-$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	1	25
	0	0	-$\frac{5}{8}$	-$\frac{15}{8}$	0	

con un valor de la función objetivo de $2656{,}25 = 2187{,}5 + (250) \times (\frac{15}{8})$, es decir se ha incrementado en el valor de la variable dual segunda $(\frac{15}{8})$ por el número de unidades incrementadas 250. Sin embargo, si la modificación alcanza el valor de 325, es decir, $\tilde{b}_2 = b_2 + 325$, la solución del problema es $x_1 = \frac{925}{8}, x_2 = \frac{875}{4}$ y $x_3 = 50$ con un valor de la función objetivo de $2765{,}625 \neq 2187{,}5 + 325 \times \frac{15}{8}$. En consecuencia dicho cambio no es "pequeño". Sobre las apreciaciones de cambios pequeños o grandes hablaremos en el tema dedicado a análisis post-óptimo.

5. Algoritmo del simplex dual

En este apartado vamos a desarrollar un algoritmo de tipo simplex, con elementos similares a los del tema 2, denominado algoritmo simplex dual.

En primer lugar seleccionamos los problemas sobre los que vamos a trabajar que serán:

$$\begin{array}{lll} \text{máx } Z & = & \mathbf{cx} \\ \text{s.a:} & & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ [P1] & & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{mín } G & = & \mathbf{b}'\mathbf{y} \\ \text{s.a:} & & A'\mathbf{y} \geq \mathbf{c}' \\ [D1] & & \mathbf{y} \text{ no restringida} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{mín } Z & = & \mathbf{cx} \\ \text{s.a:} & & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ [P2] & & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{máx } G & = & \mathbf{b}'\mathbf{y} \\ \text{s.a:} & & A'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}' \\ [D2] & & \mathbf{y} \text{ no restringida} \end{array}$$

Definición **3.** *Diremos que una base del problema primal (no necesariamente factible) es una base factible dual si y sólo si*

$$\begin{array}{lll} [1]: & \mathbf{c} - \mathbf{c}_B B^{-1} A \leq \mathbf{0} & \textit{Primal de Máximo} \\ [2]: & \mathbf{c} - \mathbf{c}_B B^{-1} A \geq \mathbf{0} & \textit{Primal de Mínimo} \end{array}$$

Se puede apreciar que dicha definición es equivalente a decir que una base es factible dual si $\mathbf{c}_B B^{-1}$ constituye una solución factible para el problema dual. Por ejemplo en el caso [1], si llamamos $\mathbf{y}' = \mathbf{c}_B B^{-1}$ tenemos que $\mathbf{c} - \mathbf{c}_B B^{-1} A = \mathbf{c} - \mathbf{y}' A \leq \mathbf{0}$ que es equivalente a la expresión que define las restricciones de [D1]. Alternativamente, la definición de base factible dual sólo implica que la correspondiente base primal verifica las condiciones de optimalidad. Si diera la casualidad que además fuera factible entonces dicha solución sería una solución óptima.

El algoritmo que se va a presentar va a trabajar con soluciones básicas factibles duales que por medio de operaciones apropiadas finalizarán (si es posible) en una solución que además será factible primal. Mientras el simplex trabaja con soluciones que no cumplían el criterio de optimalidad y poco a poco se mejoraban hasta conseguir la optimalidad, en el simplex dual se trabaja con soluciones no factibles en las que poco a poco se "mejorará" la factibilidad hasta alcanzarla (realmente lo que se irá mejorando será las soluciones del dual $\mathbf{y}' = \mathbf{c}_B B^{-1}$).

El algoritmo del simplex dual va a utilizar herramientas análogas a las utilizadas en el simplex. Los pasos son los siguientes:

- Construcción de una solución básica primal que sea básica factible dual.
- Si una solución es factible primal entonces dicha solución será óptima.
- En caso de que la solución no sea factible primal, entonces habrá que construir una solución básica primal que sea básica factible dual y que sea adyacente a la anterior, para lo cual deberemos determinar que variable sale de la base actual, que variable entra en la nueva base y deberemos realizar la operación de cambio de base.

El algoritmo va a utilizar las mismas tablas que las que ya se utilizarón en el caso del simplex.

Para obtener una idea intuitiva del algoritmo podemos tratar de ver que estamos resolviendo el problema dual del problema planteado por medio de una tabla correspondiente al primal. Con lo que el valor de los costos marginales de las variables del primal están directamente relacionados con el valor de las variables duales (ya vimos algo de esto anteriormente), y el valor de las variables del problema primal estará directamente relacionado con los costos marginales de las variables duales.

Las notas correspondientes a la construcción de una solución básica primal que sea básica factible dual se proporcionarán posteriormente por medio de ejemplos. Comenzamos suponiendo que ya tenemos una solución básica factible dual que no es factible primal, por tanto tendrá algunas variables básicas con valor negativo, y que vamos a construir una solución básica factible dual adyacente.

5.1. Determinación de la variable que abandona la base

Si no hay factibilidad primal, $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} \not\geq \mathbf{0}$, y existirá alguna variable básica tomando valor estrictamente negativo. Se selecciona para abandonar la base la variable básica x_r tal que:

$$\bar{b}_r = \min_{1\leq i\leq m} \{\bar{b}_i \mid \bar{b}_i < 0\}$$

(criterio relacionado con seleccionar la variable dual con el mejor costo marginal)

5.2. Determinación de la variable que entra la base

Con objeto de conseguir que la factibilidad se mejore y de que no se pierda la factibilidad dual de la base se seleccionará para entrar en la base una variable x_k cuyo elemento pivote sea negativo, con lo que dicha variable entrará con valor positivo y además dicha variable cumplirá:

$$\left|\frac{c_k - z_k}{y_{rk}}\right| = \min_{1\leq j\leq n} \left\{\left|\frac{c_j - z_j}{y_{rj}}\right| \mid y_{rj} < 0\right\}$$

La utilización del módulo permite definir un único criterio tanto para el caso de problemas de máximo como de mínimo.

En el caso de no existir ninguna variable no básica con valor estrictamente negativo en la fila de la variable que sale el problema que estamos tratando de resolver es *no factible* (ejercicio).

Para demostrar la convergencia del algoritmo hay que demostrar que de una tabla a otra se produce una mejora en el valor de la función objetivo del problema dual, tomando como solución $\mathbf{y}' = \mathbf{c}_B B^{-1}$ (siempre y cuando no exista degeneración dual, es decir, que la variable que entra no tenga costo marginal nulo). Bajo esta consideración siempre se toman soluciones duales distintas y en consecuencia, ya que su número es finito, el algoritmo debe finalizar (ejercicio).

Sólo resta del algoritmo la cuestión correspondiente a la construcción de soluciones básicas factibles duales. Hay una situación en la que dicha construcción es trivial, y sólo utilizaremos el algoritmo simplex dual para la resolución de problemas en este caso. Si el problema no se ajusta a esta situación entonces existen métodos para la construcción de la solución basíca factible dual, pero no vamos a entrar en ellos. Llegado el caso aplicaríamos el método simplex con variable artificial estudiado en el tema 2.

La situación considerada será cuando tengamos un PPL de *mínimo* con costos c_j no negativos y en donde todas las restricciones son de desigualdad (existiendo al menos una restricción de tipo "$\geq$"). Entonces podemos multiplicar las restricciones de tipo $\geq$ por -1 e introducir variables de holgura en la primera base. Debido a que esta primera base está formada por holguras los costos marginales coinciden con los originales y por tanto son mayores o iguales que cero y dicha solución es una solución básica que es básica factible dual.

Para finalizar el tema presentamos la resolución de algunos problemas por medio del algoritmo simplex dual.

Resolver el siguiente PPL:

$$\begin{array}{lll}
\text{mín } Z & = & x_2 \\
\text{s. a:} & & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & & x_2 \leq 4 \\
 & & -x_1 + x_2 \geq 2 \\
 & & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}$$

Transformamos el problema, multiplicando la tercera restricción por -1 e introduciendo holguras x_3, x_4 y x_5, resultando:

$$\begin{array}{ll} \text{mín } Z & = x_2 \\ \text{s. a:} & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1 - x_2 + x_5 = -2 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

con este problema la tabla inicial queda:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	2	1	1	0	0	6
x_4	0	1	0	1	0	4
x_5	1	-1	0	0	1	-2
	0	1	0	0	0	

Esta tabla consituye una solución básica factible dual. Sale la variable básica con valor negativo mayor en valor absoluto, que es x_5. Entra la variable no básica con coeficiente estrictamente negativo que hace mínimo el módulo de los cocientes $\frac{c_j - z_j}{y_{3j}}$, es decir, la única existente x_2, finalmente se pivota haciendo un 1 en la posición de cruce (análogo al algoritmo del simplex). La tabla resultante es:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	3	0	1	0	1	4
x_4	1	0	0	1	1	2
x_2	-1	1	0	0	-1	2
	1	0	0	0	1	

La tabla obtenida es óptima ya que es factible primal. La solución es $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ con un valor de la función objetivo de 2.

$$\begin{array}{ll} \text{mín } Z & = 31x_1 + 11x_2 + 12x_3 \\ \text{s. a:} & x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 21 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 12 \\ & 2x_2 + 2x_3 \leq 16 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Cambiamos de dirección las dos primeras restricciones e introducimos holguras en todas.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	-1	-1	-2	1	0	0	-21
x_5	-2	-1	-1	0	1	0	-12
x_6	0	2	2	0	0	1	16
	31	11	12	0	0	0	

Sale la variable básica con valor negativo más grande en valor absoluto, x_4, y entra la variable con la que se alcanza el siguiente mínimo

$$\left|\frac{c_k - z_k}{y_{1k}}\right| = \min_{1\leq j\leq n}\left\{\left|\frac{c_j - z_j}{y_{1j}}\right| \; |y_{1j} < 0\right\} \qquad |\frac{12}{-2}| = \min\{|\frac{31}{-1}|, |\frac{11}{-1}|, |\frac{12}{-2}|\},$$

es decir x_3.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{21}{2}$
x_5	-$\frac{3}{2}$	-$\frac{1}{2}$	0	-$\frac{1}{2}$	1	0	-$\frac{3}{2}$
x_6	-1	1	0	1	0	1	-5
	25	5	0	6	0	0	

Sale x_6 y entra x_1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	8
x_5	0	-2	0	-2	1	-$\frac{3}{2}$	6
x_1	1	-1	0	-1	0	-1	5
	0	30	0	31	0	25	

La solución es factible primal y por tanto óptima, siendo $x_1 = 5, x_2 = 0$ y $x_3 = 8$.

Por último resolvamos el siguiente problema,

$$\begin{array}{lll} \text{mín } Z & = & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s. a:} & & 3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 5 \\ & & x_3 \leq 2 \\ & & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

La tabla inicial es

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	3	2	0	1	0	0	3
x_5	-2	-3	1	0	1	0	-5
x_6	0	0	1	0	0	1	2
	1	1	1	0	0	0	

Sale x_5 y entra x_2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
x_2	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
x_6	0	0	1	0	0	1	2
	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	

Ahora debe salir x_4, pero no existe variable candidata a entrar en la base, por tanto el problema es no factible. Puede observarse que la posible mejor situación sería $x_3 = 0$ con lo que obtendríamos que $3x_1 + 2x_2 \leq 3$ y $2x_1 + 3x_2 \geq 5$ que son incompatibles.